MODEL SEIR PENYAKIT CAMPAK DENGAN VAKSINASI DAN MIGRASI

TUGAS AKHIR

Diajukan Sebagai Salah Satu Syarat
Untuk Memperoleh Gelar Sarjana Sains
Pada Jurusan Matematika

Oleh :

SITI RAHMA
10854004452

FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI SULTAN SYARIF KASIM RIAU
PEKANBARU

2012

MODEL SEIR PENYAKIT CAMPAK DENGAN VAKSINASI DAN MIGRASI

SITI RAHMA
10854004452

Tanggal Sidang : 27 Juni 2012
Periode Wisuda : 2012

Jurusan Matematika
Fakultas Sains dan Teknologi
Universitas Islam Negeri Sultan Syarif Kasim Riau
Jl. HR. Soebrantas No.155 Pekanbaru

ABSTRAK

Tugas akhir ini menjelaskan tentang model penyebaran penyakit campak menggunakan model SEIR dengan vaksinasi dan migrasi. Hasil yang diperoleh adalah jika $R_0 < 1$ maka titik ekuilibrium bebas penyakit stabil asimtotik dan jika $R_0 > 1$ maka titik ekuilibrium endemik penyakit stabil asimtotik. Jumlah orang yang divaksinasi untuk mencegah penyebaran penyakit campak adalah $p_c > 1 - \frac{1}{R_0}$.

Kata kunci: Model SEIR, Penyakit Campak, Stabil Asimtotik, Titik Ekuilibrum, Vaksinasi.

KATA PENGANTAR

Segala puji bagi Allah SWT yang senantiasa melimpahkan rahmat dan taufik serta hidayah-Nya sehingga penulis dapat menyelesaikan tugas akhir ini dengan judul "**Model SEIR Penyakit Campak dengan Vaksinasi dan Migrasi**". Limpahan shalawat serta salam selalu terucap kepada Nabi Muhammad SAW, pembawa petunjuk bagi seluruh umat manusia yang telah membawa umat manusia ke alam yang penuh dengan ilmu pengetahuan.

Selanjutnya, penulis ucapkan terima kasih yang tak terhingga kepada kedua orang tua tercinta yang telah memberikan semangat, motivasi, yang selalu mendoakan penulis dalam menyelesaikan tugas akhir ini. Terima kasih juga penulis ucapkan kepada kakak, adik, dan keponakan tersayang yang telah memberikan semangat dan selalu mendoakan penulis. Ucapan terimakasih selanjutnya kepada:

1. Bapak Prof. Dr. H. M. Nazir, selaku Rektor Universitas Islam Negeri Sultan Syarif Kasim Riau.
2. Ibu Dra. Hj. Yenita Morena, M.Si selaku Dekan Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Sultan Syarif Kasim Riau.
3. Ibu Sri Basriati, M.Sc selaku Ketua Jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Sultan Syarif Kasim Riau.
4. Bapak Mohammad Soleh, M.Sc selaku pembimbing yang telah banyak membantu, meluangkan waktu, mendukung, mengarahkan dan membimbing penulis dalam menyelesaikan tugas akhir ini.
5. Bapak Wartono, M.Sc selaku penguji I dan yang telah memberikan kritikan dan saran sehingga tugas akhir ini selesai.
6. Bapak Nilwan Andiraja, M.Sc selaku penguji II yang telah memberikan kritikan dan saran sehingga tugas akhir selesai.
7. Ibu Fitri Aryani, M.Sc selaku koordinator tugas akhir yang telah banyak membantu dalam penyelesaian tugas akhir ini.
8. Semua Bapak dan Ibu dosen Jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi. Terima kasih atas semua saran yang diberikan kepada penulis.

9. Teman-teman Jurusan Matematika khususnya angkatan 2008.
10. Sahabat terbaikku Fitri Kumala Sari, Yusnita, Lona Helcera, Fatmawati, Asril Apheri, Isma Neti, Parubahan Siregar, terima kasih atas kontribusinya selama ini.
11. Semua pihak yang telah memberikan bantuannya dari awal sampai selesai tugas akhir ini yang tidak bisa disebutkan satu persatu.

Semoga amal dan kebaikan yang diberikan kepada penulis mendapatkan balasan dari Allah SWT. Penulis menyadari dalam penulisan tugas akhir ini jauh dari kesempurnaan karena kesempurnaan itu hanya milik Allah SWT oleh karena itu kritik dan saran yang membangun sangat penulis harapkan demi kesempurnaan tugas akhir ini selanjutnya. Semoga tugas akhir ini dapat memberikan kontribusi yang bermanfaat. Amin.

.

Pekanbaru, 27 Juni 2012

SITI RAHMA

DAFTAR ISI

BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Penyakit campak merupakan salah satu penyakit endemik di negara berkembang. Penyakit campak disebabkan oleh virus campak, dari family *Paramyxoviridae*, genus *Morbilivirus*. Penyakit ini diawali dengan adanya gejala awal demam, batuk, pilek yang kemudian diikuti dengan bercak merah kemerahan pada kulit (Widoyono, 2005). Penyakit campak dinilai berbahaya karena dapat menimbulkan komplikasi seperti peradangan otak, gangguan pernafasan bahkan kematian. Oleh karena itu perlu adanya tindakan pencegahan untuk mengurangi laju penyebaran penyakit ini.

Salah satu cara yang efektif untuk tindakan pencegahan penyakit campak adalah dengan vaksinasi. Keberhasilan vaksinasi dapat diukur dari menurunnya jumlah kasus campak dari waktu ke waktu. Kematian akibat campak mengalami penurunan sebesar 78% dari 733.000 jiwa di tahun 2000 menjadi 164.000 jiwa pada tahun 2008 (www.who.int/mediacentre).

Perpindahan populasi (migrasi) dari suatu wilayah ke wilayah lain merupakan fenomena yang dapat terjadi di suatu wilayah. Adanya migrasi dapat memungkinkan terjadinya penyebaran penyakit campak yang dibawa oleh populasi yang masuk atau keluar dari suatu wilayah. Oleh karena itu, migrasi perlu diperhatikan dalam model.

Perkembangan ilmu pengetahuan memberikan peranan penting dalam mencegah meluasnya penyebaran penyakit campak. Peranan tersebut berupa model matematika yang mempelajari penyebaran penyakit. Walaupun model matematika tidak mampu untuk menyembuhkan penyakit, akan tetapi model matematika dapat membantu dalam memprediksi dan pengendalian penyakit endemik di masa yang akan datang.

Model dasar tentang penyebaran penyakit pertama kali dirumuskan oleh Kermack dan McKendrick pada tahun 1927 (Chasnov, 2009). Dalam modelnya, Kermack-McKendrick membagi populasi total menjadi tiga kelas, yaitu *Susceptible* (S) merupakan jumlah individu yang sehat tetapi rentan terhadap penyakit, *Infected* (I) adalah jumlah individu yang terinfeksi dan dapat menularkan penyakit kepada individu yang sehat, dan *Recovered* (R) yang menotasikan jumlah individu yang telah sembuh dari penyakit dan akan kebal dari penyakit. Beberapa penyakit seperti campak, AIDS, TBC mempunyai periode laten, artinya ada selang waktu suatu individu terinfeksi sampai munculnya suatu penyakit. Periode laten ini akan terdapat pada kelas *Exsposed* (E), artinya individu yang terdeteksi atau terjangkit virus. Penambahan kelas pada penyakit campak ini akan membentuk model SEIR.

Model penyebaran penyakit telah banyak dibahas, salah satunya jurnal yang berjudul *Mathematical Model for Control Of Measles by Vaccination* oleh Moussa Tessa (2006). Jurnal ini membahas tentang model penyakit campak dengan vaksinasi. Jurnal lain yang membahas tentang model SEIR adalah *Kestabilan Model SEIR*, oleh Aminah Ekawati (2011). Jurnal ini membahas tentang kestabilan pada model SEIR tanpa adanya spesifikasi penerapannya pada suatu penyakit. *Analisis Kestabilan Model SIR, SIR Vaksinasi, SEIR, dan MSEIR Sebagai Model-model Penyebaran Penyakit Campak (Measles)* oleh Ace Suhendar (2011). Pada jurnal ini dibahas tentang kestabilan dari setiap model pada penyakit campak.

Berdasarkan pembahasan dari jurnal yang ditulis oleh Moussa Tessa penulis tertarik untuk mengulas jurnal *Mathematical Model for Control Of Measles by Vaccination* dengan menambahkan asumsi adanya pengaruh migrasi dengan judul “Model SEIR Penyakit Campak dengan Vaksinasi dan Migrasi”.

1.2 Rumusan Masalah

Adapun rumusan masalah pada tugas akhir ini adalah:

1. Bagaimanakah membentuk model SEIR penyakit campak dengan vaksinasi dan migrasi?
2. Bagaimanakah kestabilan titik ekuilibrium penyakit campak model SEIR dengan vaksinasi dan migrasi?
3. Berapa jumlah individu yang divaksinasi agar tidak terjadi endemik penyakit?

1.3 Batasan Masalah

Agar penulisan pada tugas akhir menjadi lebih terarah, permasalahan dibatasi pada pembahasan yang merujuk pada jurnal *Mathematical Model for Control Of Measles by Vaccination* dari Moussa Tessa yang membahas tentang model SEIR pada penyakit campak dengan vaksinasi dan adanya pengaruh migrasi.

1.4 Tujuan Penulisan

Tujuan penulisan tugas akhir ini adalah :

1. Memperoleh model penyakit campak dengan model SEIR vaksinasi dan migrasi.
2. Mengetahui kestabilan titik ekuilibrium penyakit campak dengan model SEIR vaksinasi dan migrasi.
3. Menentukan jumlah individu yang divaksinasi agar tidak terjadi endemik penyakit.

1.5 Sistematika Penulisan

Sistematika penulisan pada tugas akhir ini terdiri dari beberapa bab yaitu :

Bab I Pendahuluan

Bab ini berisikan latar belakang masalah, rumusan masalah, batasan masalah, tujuan penulisan, dan sistematika penulisan.

Bab II Landasan Teori

Bab ini menjelaskan tentang landasan teori yang digunakan, seperti sistem persamaan diferensial, titik ekuilibrium, matriks Jacobian, nilai eigen dan vektor eigen, kriteria kestabilan Routh-Hurwitz, dan model SEIR tanpa vaksinasi dan migrasi.

Bab III Metodologi Penelitian

Bab ini berisikan langkah-langkah yang penulis gunakan untuk menyelesaikan model matematika penyakit campak dengan vaksinasi dan migrasi.

Bab IV Pembahasan

Bab ini berisikan pembahasan mengenai model matematika penyakit campak dengan vaksinasi dan migrasi.

Bab V Penutup

Bab ini berisikan kesimpulan dari seluruh uraian dan saran untuk pembaca.

BAB II

LANDASAN TEORI

Pada bab ini diberikan definisi dan teorema yang mendukung dalam mencapai tujuan penulisan. Berikut ini diberikan gambaran singkat mengenai sistem persamaan differensial, titik ekuilibrium, matriks Jacobian, dan model SEIR tanpa vaksinasi dan migrasi.

2.1 Sistem Persaman Differensial

Persamaan diferensial adalah suatu persamaan yang melibatkan turunan dari satu atau lebih variabel terikat terhadap satu atau lebih variabel bebas, sedangkan sistem persamaan diferensial terdiri dari beberapa persamaan diferensial. Dibawah ini diberikan sistem persamaan diferensial linear dan nonlinear.

Diberikan sistem persamaan diferensial

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= f_1(x_1, x_2, \cdots, x_n), \\ \dot{x}_2 &= f_2(x_1, x_2, \cdots, x_n), \\ &\vdots \\ \dot{x}_n &= f_n(x_1, x_2, \cdots, x_n), \end{aligned} \tag{2.1}$$

dengan $E \subset R^n$, dan $f: E \to R^n$ fungsi kontinu pada E.

Sistem (2.1) dapat ditulis sebagai

$$\dot{\boldsymbol{x}} = f(\boldsymbol{x}) \tag{2.2}$$

Jika $f_1, f_2, \ldots, f_n$ masing – masing linear dalam $x_1, x_2, \ldots, x_n$, maka sistem (2.2) disebut sistem persamaan differensial linear yang dapat dituliskan sebagai

$$\begin{aligned} \dot{x_1} &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \cdots + a_{1n}x_n \\ \dot{x_2} &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \cdots + a_{2n}x_n \\ &\vdots \\ \dot{x_n} &= a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + a_{n3}x_3 + \cdots + a_{nn}x_n \end{aligned} \tag{2.3}$$

Sistem (2.3) dapat dinyatakan dalam bentuk $\dot{x} = Ax$, dengan $x \in E$ dan A matriks $n\,x\,n$. Sistem (2.2) disebut sistem nonlinear jika tidak dapat dinyatakan dalam bentuk sistem (2.3).

2.2. Titik Ekuilibrium

Titik ekuilibrum dari sistem merupakan titik yang mana sistem tersebut tidak mengalami perubahan sepanjang waktu (Panvilov, 2004). Secara matematis definisi titik ekuilibrium dapat dituliskan sebagai berikut.

Definisi 2.1 (Perko, 1991) *Titik $x^* \in R^n$ disebut titik ekuilibrium (titik kesetimbangan) dari sistem (2.2)* jika $f(x^*) = 0$.

Definisi 2.2 (Perko, 1991)

Titik ekuilibrium $x^* \in R^n$ dari sistem (2.2) dikatakan :

a) *Stabil jika untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat $\delta > 0$ sedemikian hingga untuk setiap solusi $x(t)$ yang memenuhi $\|x(t_0) - x^*\| < \delta$ berlaku $\|x(t) - x^*\| < \varepsilon$ untuk setiap $t \geq t_0$.*

b) *Stabil asimtotik lokal jika titik equilibrium $x^* \in R^n$ stabil dan terdapat bilangan $\delta_0 > 0$ sehingga untuk setiap solusi $x(t)$ yang memenuhi $\|x(t_0) - x^*\| < \delta_0$ maka berlaku $\lim_{t\to\infty} x(t) = x^*$.*

c) *Tidak stabil jika titik equilibrium $x^* \in R^n$ tak memenuhi (a).*

2.3 Matriks Jacobian

Definisi 2.3 (Kocak, 1991) Diberikan $f = (f_1, f_2, \dots \dots f_n)$ pada sistem (2.1) dengan $f_i \in C^1(E), i = 1,2, \dots . n$. Matriks

$$J\left(f\left(x^*\right)\right) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}\left(x^*\right) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}\left(x^*\right) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}\left(x^*\right) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}\left(x^*\right) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}\left(x^*\right) & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n}\left(x^*\right) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1}\left(x^*\right) & \frac{\partial f_n}{\partial x_2}\left(x^*\right) & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n}\left(x^*\right) \end{bmatrix}$$

$J\left(f\left(x^*\right)\right)$ dinamakan matriks Jacobian dari f di titik x^*.

Definisi 2.4 (Anton, 1998) *Jika A adalah matriks n x n, maka vektor tak nol x didalam R^n disebut vektor eigen dari A, jika untuk suatu skalar λ, yang disebut nilai eigen dari A diperoleh $Ax = \lambda x$.*

Definisi 2.5 (Anton, 1998) *Vektor x disebut vektor eigen yang bersesuaian dengan nilai eigen x.*

Kestabilan dari titik ekuilibrium pada Sistem (2.2) dapat ditentukan berdasarkan nilai eigen matriks Jacobian pada metode linearisasi. Nilai eigen dapat ditentukan melalui persamaan karakteristik dari matriks Jacobian di titik x^* . Kriteria kestabilan titik ekuilibrium pada Sistem (2.2) tersebut disajikan pada teorema dibawah ini :

Teorema 2.1 (Wiggins, 1990) *Jika semua nilai eigen matriks Jacobian mempunyai bagian real negatif, maka titik ekuilibrium x^* dari sistem (2.2) stabil asimtotik lokal.*

Jika persamaan karakteristik yang diperoleh cukup rumit untuk mencari akar-akar karakteristiknya yaitu dengan bagian real negatif eigen matriks, maka untuk menentukan apakah nilai eigen bernilai negatif dapat menggunakan kriteria Routh-Hurwitz.

Teorema 2.2 Kriteria kestabilan Routh-Hurwitz

Diberikan persamaan karakteristik $P(\lambda) = \lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \cdots + a_{n-1}\lambda + a_n$. Untuk $n = 2$, kondisi Routh-Hurwitz sebagai berikut : $a_1 > 0, a_2 > 0$. Untuk $n = 3$, kondisi Routh-Hurwitz sebagai berikut : $a_3 > 0, a_1 > 0$, $a_1a_2 > a_3$. Jika kriteria Routh-Hurwitz terpenuhi, maka titik ekuilibrium x^* stabil asimtotik lokal.

2.4 Model SEIR Tanpa Vaksinasi dan Migrasi

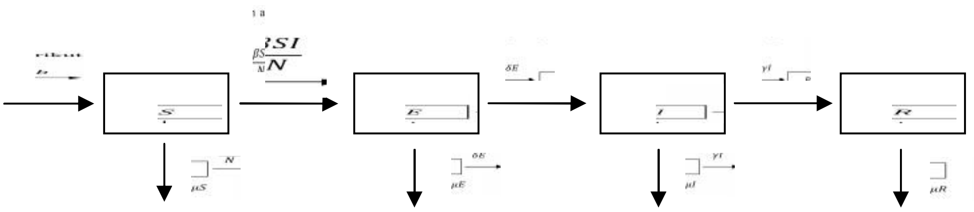
Pada model SEIR populasi dibagi menjadi 4 kelas, yaitu : kelas populasi rentan *Susceptible* (S), kelas populasi terjangkit *Exposed* (E), kelas populasi terinfeksi *Infected* (I), dan kelas populasi sembuh *Recovered* (R). Kemudian $S(t)$ menyatakan proporsi individu rentan pada saat t, $E(t)$ menyatakan proporsi individu terjangkit pada saat t, $I(t)$ menyatakan proporsi individu terinfeksi pada saat t, $R(t)$ menyatakan proporsi individu sembuh pada saat t, dan $N(t)$ menyatakan proporsi total individu.

Dibawah ini merupakan contoh model SEIR pada penyakit campak tanpa vaksinasi dan migrasi yang dibahas oleh Aminah Ekawati (2011) dalam jurnal *Kestabilan Model SEIR*.

Adapun asumsi yang digunakan dalam jurnal tersebut adalah sebagai berikut :

1. Populasi konstan, $N(t) = S(t) + E(t) + I(t) + R(t)$.
2. Penyakit tidak fatal.
3. Individu yang lahir masuk kedalam kelas *Susceptible* (S).
4. Individu yang telah sembuh mempunyai kekebalan sehingga tidak ada aliran dari kelas *Recovered* (R) ke kelas *Susceptible* (S).
5. Laju kelahiran sama dengan laju kematian alami.

Berdasarkan asumsi di atas, dapat digambarkan diagram transfer berikut :



Gambar 2.1 Model SEIR Penyakit Campak Tanpa Vaksinasi dan Migrasi

Model matematika berdasarkan diagram transfer di atas sebagai berikut :

$$\frac{dS}{dt} = b - \mu S - \frac{\beta SI}{N} \qquad (2.4.a)$$

$$\frac{dE}{dt} = \frac{\beta SI}{N} - (\mu + \delta)E \qquad (2.4.b)$$

$$\frac{dI}{dt} = \delta E - (\mu + \gamma)I \qquad (2.4.c)$$

$$\frac{dR}{dt} = \gamma I - \mu R \qquad (2.4.d)$$

$S + E + I + R = N$, dengan

b : laju kelahiran

μ : laju kematian alami

β : laju kontak

δ : laju infeksi kelas *susceptible* ke kelas *infected*

γ : laju kesembuhan

N : jumlah total populasi

Sistem (2.4) mempunyai solusi (S,E,I,R) sebagai himpunan $\Phi = \{(S,E,I,R) \mid S \geq 0, E \geq 0, I \geq 0, R \geq 0,\ S+E+I+R = N\}$.

Nilai R dapat dicari dengan $R = N - S - E - I$, dan persamaan (2.4.d) tidak berpengaruh secara langsung pada persamaaan (2.4.a), (2.4.b), (2.4.c) sehingga nilai R dapat diabaikan. Sistem (2.4) akan menjadi

$$\frac{dS}{dt} = b - \mu S - \frac{\beta SI}{N} \quad (2.5.a)$$

$$\frac{dE}{dt} = \frac{\beta SI}{N} - (\mu + \delta)E \quad (2.5.b)$$

$$\frac{dI}{dt} = \delta E - (\mu + \gamma)I \quad (2.5.c)$$

Solusi sistem (2.5) adalah himpunan $\Omega = \{(S,E,I) \mid S \geq 0, E \geq 0,\ I \geq 0,\ S+E+I \leq N\}$.

2.5 Titik Ekuilibrium

1. Titik Ekuilibrium Bebas Penyakit

   Populasi bebas penyakit artinya di dalam populasi tidak ada yang sakit, $I = 0$. Sehingga diperoleh I pada titik ekuilibrium bebas penyakit yang dinotasikan dengan $\hat{I}$, yaitu $\hat{I} = 0$.

   Dari persamaan (2.5.c) diperoleh

   $$\delta E - (\mu + \gamma)I = 0$$
   $$\delta E - (\mu + \gamma)0 = 0$$
   $$\delta E = 0$$
   $$E = 0$$

   Sehingga diperoleh E untuk titik ekuilibrium bebas penyakit yang dinotasikan dengan $\hat{E}$, yaitu $\hat{E} = 0$

Dari persamaan (2.5.a) diperoleh

$$b - \mu S - \frac{\beta SI}{N} = 0$$

$$b - \mu S - \frac{\beta S.0}{N} = 0$$

$$b - \mu S - 0 = 0$$

$$b - \mu S = 0$$

$$b = \mu S$$

$$S = \frac{b}{\mu}$$

Sehingga diperoleh S untuk titik ekuilibrium bebas penyakit yang dinotasikan dengan $\hat{S}$, yaitu $\hat{S} = \frac{b}{\mu}$.

Jadi, titik ekuilibrium bebas penyakit $(\hat{S}, \hat{E}, \hat{I}) = (\frac{b}{\mu}, 0{,}0)$.

2. Titik Ekuilibrium Endemik Penyakit

Endemik penyakit artinya di dalam populasi selalu terdapat individu yang terserang penyakit, $I > 0$. Sehingga diperoleh I pada titik ekuilibrium endemik penyakit yang dinotasikan dengan I^*, yaitu $I^* > 0$.

Dari persamaan (2.5.c) diperoleh

$$\delta E - (\mu + \gamma)I = 0$$

$$\delta E = (\mu + \gamma)I$$

$$E = \frac{(\mu + \gamma)I}{\delta}$$

Setelah diperoleh nilai $E = \frac{(\mu+\gamma)I}{\delta}$, subsitusikan ke persamaan (2.5.b) sehingga diperoleh

$$\frac{\beta SI}{N} - (\mu + \delta)E = 0$$

$$\frac{\beta SI}{N} - (\mu + \delta)\left(\frac{(\mu + \gamma)I}{\delta}\right) = 0$$

$$\left(\frac{\beta S}{N} - (\mu + \delta)\frac{(\mu + \gamma)}{\delta}\right)I = 0$$

$$\frac{\beta S}{N} - (\mu + \delta)\frac{(\mu + \gamma)}{\delta} = 0$$

$$\frac{\beta S}{N} = (\mu + \delta)\frac{(\mu + \gamma)}{\delta}$$

$$S = (\mu + \delta)\frac{(\mu + \gamma)}{\delta}\ N\frac{1}{\beta}$$

Diperoleh S pada titik ekuilibrium yang dinotasikan dengan S^*, yaitu :

$$S^* = \frac{(\mu + \delta)(\mu + \gamma)}{\delta\beta}\ N$$

Selanjutnya untuk memperoleh nilai I subsitusikan $S = \frac{(\mu+\delta)(\mu+\gamma)}{\delta\beta}\ N$ ke persamaan (2.5.a) sehingga diperoleh

$$b - \mu S - \frac{\beta S I}{N} = 0$$

$$b - \mu\left(\frac{(\mu + \delta)(\mu + \gamma)}{\delta\beta}\ N\right) - \frac{\beta\left(\frac{(\mu + \delta)(\mu + \gamma)}{\delta\beta}\ N\right)I}{N} = 0$$

$$b - \mu\left(\frac{(\mu + \delta)(\mu + \gamma)}{\delta\beta}\ N\right) = \frac{\beta\left(\frac{(\mu + \delta)(\mu + \gamma)}{\delta\beta}\ N\right)I}{N}$$

$$b - \mu\left(\frac{(\mu + \delta)(\mu + \gamma)}{\delta\beta}\ N(N)\right) = \beta\left(\frac{(\mu + \delta)(\mu + \gamma)}{\delta\beta}\ N\right)I$$

$$\beta\left(\frac{(\mu + \delta)(\mu + \gamma)}{\delta\beta}\ N\right)I = b - \mu\left(\frac{(\mu + \delta)(\mu + \gamma)}{\delta\beta}\ N(N)\right)$$

$$I = \frac{b - \mu\left(\frac{(\mu + \delta)(\mu + \gamma)}{\delta\beta}\ N(N)\right)}{\beta\left(\frac{(\mu + \delta)(\mu + \gamma)}{\delta\beta}\ N\right)}$$

Maka diperolch I untuk titik ekuilibrium endemik penyakit yang dinotasikan dengan I^*, yaitu

$$I^* = \frac{b - \frac{\mu N(\mu + \delta)(\mu + \gamma)}{\delta\beta}}{\frac{(\mu + \delta)(\mu + \gamma)}{\delta}}$$

Subsitusikan I ke persamaan (2.5.c) untuk memperoleh E sebagai berikut :

$$\delta E - (\mu + \gamma) I = 0$$

$$\delta E = (\mu + \gamma) I$$

$$\delta E = (\mu + \gamma) \left(\frac{b - \frac{\mu N (\mu + \delta)(\mu + \gamma)}{\delta \beta}}{\frac{(\mu + \delta)(\mu + \gamma)}{\delta}} \right)$$

$$E = (\mu + \gamma) \left(\frac{b - \frac{\mu N (\mu + \delta)(\mu + \gamma)}{\delta \beta}}{\frac{(\mu + \delta)(\mu + \gamma)}{\delta}} \right) \frac{1}{\delta}$$

Maka diperolch E pada titik ekuilibrium endemik penyakit yang dinotasikan dengan E^*, yaitu :

$$E^* = \frac{b - \frac{\mu N (\mu + \delta)(\mu + \gamma)}{\delta \beta}}{(\mu + \delta)}$$

Jadi, titik ekuilibrium endemik penyakit $(S^*, E^*, I^*) = \left(\frac{(\mu+\delta)(\mu+\gamma)N}{\delta\beta}, \frac{b - \frac{\mu N(\mu+\delta)(\mu+\gamma)}{\delta\beta}}{(\mu+\delta)}, \frac{b - \frac{\mu N(\mu+\delta)(\mu+\gamma)}{\delta\beta}}{\frac{(\mu+\delta)(\mu+\gamma)}{\delta}} \right)$.

Karena $I^* > 0$, artinya pada populasi selalu terdapat individu yang sakit maka pada model ini didefinisikan bilangan reproduksi dasar R_0. Bilangan reproduksi dasar (R_0) adalah rata-rata banyaknya infeksi sekunder jika satu individu *infected* dimasukkan kedalam suatu kelompok yang semuanya *susceptible*. Nilai R_0 digunakan untuk mengetahui suatu populasi bebas penyakit atau endemic penyakit.

$I^* = > 0$, maka $\frac{b - \frac{\mu N(\mu+\delta)(\mu+\gamma)}{\delta\beta}}{\frac{(\mu+\delta)(\mu+\gamma)}{\delta}} > 0$. Karena $N = \frac{b}{\mu}$, maka persamaan menjadi

$$\frac{b - \frac{b(\mu + \delta)(\mu + \gamma)}{\delta \beta}}{\frac{(\mu + \delta)(\mu + \gamma)}{\delta}} > 0$$

$$b - \frac{b(\mu+\delta)(\mu+\gamma)}{\delta\beta} > 0$$

$$\frac{b\delta\beta - b(\mu+\delta)(\mu+\gamma)}{\delta\beta} > 0$$

$$\frac{b\big(\delta\beta - (\mu+\delta)(\mu+\gamma)\big)}{\delta\beta} > 0$$

$$\delta\beta - (\mu+\delta)(\mu+\gamma) > 0$$

$$\delta\beta > (\mu+\delta)(\mu+\gamma)$$

Karena $\delta\beta > (\mu+\delta)(\mu+\gamma)$ maka dapat didefinisikan bilangan reproduksi dasar sebagai berikut :

$$R_0 = \frac{\delta\beta}{(\mu+\delta)(\mu+\gamma)}$$

2.6 Kestabilan Titik Ekuilibrium

Untuk menentukan sifat kestabilan sistem, maka digunakan Matriks Jacobian. Matriks Jacobian dari model SEIR adalah :

$$Jf(S,E,I) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial S} & \frac{\partial f_1}{\partial E} & \frac{\partial f_1}{\partial I} \\ \frac{\partial f_2}{\partial S} & \frac{\partial f_2}{\partial E} & \frac{\partial f_2}{\partial I} \\ \frac{\partial f_3}{\partial S} & \frac{\partial f_3}{\partial E} & \frac{\partial f_3}{\partial I} \end{bmatrix}$$

Dengan $f_1\ (S,E,I)$, $f_2\ (S,E,I)$, dan $f_3\ (S,E,I)$ sebagai beikut :

$$b - \mu S - \frac{\beta SI}{N} = f_1\ (S,E,I)$$

$$\frac{\beta SI}{N} - (\mu+\delta)E = f_2\ (S,E,I)$$

$$\delta E - (\mu+\gamma)I = f_3\ (S,E,I)$$

Selanjutnya fungsi $f_1\ (S,E,I)$, $f_2\ (S,E,I)$, dan $f_3\ (S,E,I)$ diturunkan terhadap parameternya sebagai berikut :

$$\frac{\partial f_1}{\partial S} = -\mu - \frac{\beta I}{N}, \qquad \frac{\partial f_2}{\partial S} = \frac{\beta I}{N}, \qquad \frac{\partial f_3}{\partial S} = 0$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial E} = 0 \qquad \frac{\partial f_2}{\partial E} = -(\mu+\delta) \qquad \frac{\partial f_3}{\partial E} = \delta$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial I} = -\frac{\beta S}{N} \qquad \frac{\partial f_2}{\partial I} = \frac{\beta S}{N} \qquad \frac{\partial f_3}{\partial I} = -(\mu + \gamma)$$

Berdasarkan turunan yang telah diperoleh, maka dapat dibentuk kedalam matriks Jacobian berikut :

$$Jf(S,E,I) = \begin{bmatrix} -\mu - \frac{\beta I}{N} & 0 & -\frac{\beta S}{N} \\ \frac{\beta I}{N} & -\mu - \delta & \frac{\beta S}{N} \\ 0 & \delta & -\mu - \gamma \end{bmatrix}$$

Teorema 2.3

(i) Jika $R_0 < 1$ maka titik ekuilibrium bebas penyakit $(\hat{S}, \hat{E}, \hat{I}) = (\frac{b}{\mu}, 0{,}0)$ stabil asimtotik lokal.

(ii) Jika $R_0 > 1$ maka titik ekuilibrium endemic penyakit $(S^*, E^*, I^*) = \left(\frac{(\mu+\delta)(\mu+\gamma)N}{\delta\beta}, \frac{b - \frac{\mu N(\mu+\delta)(\mu+\gamma)}{\delta\beta}}{(\mu+\delta)}, \frac{b - \frac{\mu N(\mu+\delta)(\mu+\gamma)}{\delta\beta}}{\frac{(\mu+\delta)(\mu+\gamma)}{\delta}}\right)$ stabil asimtotik lokal.

Bukti:

(i) Untuk $R_0 < 1$ titik ekuilibrium bebas penyakit $(\frac{b}{\mu}, 0{,}0)$ maka diperoleh matriks Jacobian

$$J\left(\frac{b}{\mu}, 0{,}0\right) = \begin{bmatrix} -\mu & 0 & -\frac{\beta\left(\frac{b}{\mu}\right)}{N} \\ 0 & -\mu - \delta & \frac{\beta\left(\frac{b}{\mu}\right)}{N} \\ 0 & \delta & -\mu - \gamma \end{bmatrix}$$

Karena $N = \frac{b}{\mu}$, maka

$$J\left(\frac{b}{\mu}, 0{,}0\right) = \begin{bmatrix} -\mu & 0 & -\beta \\ 0 & -\mu - \delta & \beta \\ 0 & \delta & -\mu - \gamma \end{bmatrix}$$

Kemudian hitung $\det\left(\lambda I - J\left(\frac{b}{\mu}, 0{,}0\right)\right) = 0$

$$\det\left(\begin{bmatrix}\lambda & 0 & 0\\ 0 & \lambda & 0\\ 0 & 0 & \lambda\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}-\mu & 0 & -\beta\\ 0 & -\mu-\delta & \beta\\ 0 & \delta & -\mu-\gamma\end{bmatrix}\right)=0$$

$$\det\begin{bmatrix}\lambda+\mu & 0 & \beta\\ 0 & \lambda+\mu+\delta & -\beta\\ 0 & -\delta & \lambda+\mu+\gamma\end{bmatrix}=0$$

Sehingga diperoleh persamaan karakteristik berikut

$$(\lambda+\mu)(\lambda+\mu+\delta)(\lambda+\mu+\gamma)-(\lambda+\mu)\beta\delta=0$$

$$(\lambda+\mu)\big((\lambda+\mu+\delta)(\lambda+\mu+\gamma)-\beta\delta\big)=0$$

Nilai eigen dari persamaan karakteristik di atas adalah :

- $(\lambda+\mu)=0$

  $\lambda_1 = -\mu$

- $(\lambda+\mu+\delta)(\lambda+\mu+\gamma)-\beta\delta=0$

  $\lambda^2+\big((\mu+\delta)+(\mu+\gamma)\big)\lambda+(\mu+\delta)(\mu+\gamma)-\beta\delta = 0$

  $$\lambda_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

  $$\lambda_1=\frac{-(\mu+\delta+\mu+\gamma)+\sqrt{[(\mu+\delta)+(\mu+\gamma)]^2-4(\mu+\delta)(\mu+\gamma)+4\beta\delta}}{2}$$

  $$\lambda_2=\frac{-(\mu+\delta+\mu+\gamma)-\sqrt{[(\mu+\delta)+(\mu+\gamma)]^2-4(\mu+\delta)(\mu+\gamma)+4\beta\delta}}{2}$$

❖ Untuk λ_2 : bagian real dari $\lambda_2<0$, karena $R_0<1 \Leftrightarrow \frac{\delta\beta}{(\mu+\delta)(\mu+\gamma)}<1 \Leftrightarrow \beta\delta<(\mu+\delta)(\mu+\gamma) \Leftrightarrow \beta\delta-(\mu+\delta)\ (\mu+\gamma)<0$ sehingga $4\beta\delta-4(\mu+\delta)(\mu+\gamma)<0$. Jadi, $\lambda_2<0$.

❖ Untuk λ_3 : bagian real dari $\lambda_3<0$, karena $R_0<1 \Leftrightarrow \frac{\delta\beta}{(\mu+\delta)(\mu+\gamma)}<1 \Leftrightarrow \beta\delta<(\mu+\delta)\ (\mu+\gamma) \Leftrightarrow \beta\delta-(\mu+\delta)\ (\mu+\gamma)<0$ sehingga $4\beta\delta-4(\mu+\delta)(\mu+\gamma)<0$. Jadi, $\lambda_3<0$.

Karena nilai $\lambda_1<0$, $\lambda_2<0$, $\lambda_3<0$ maka titik ekuilibrium $\left(\frac{b}{\mu},0,0\right)$ stabil asimtotik lokal.

(ii) Untuk $R_0>1$ titik ekuilibrium (S^*,E^*,I^*), maka diperoleh matriks Jacobian

$$J(S^*,E^*,I^*) = \begin{bmatrix} -\mu-\frac{\beta I^*}{N} & 0 & -\frac{\beta S^*}{N} \\ \frac{\beta I^*}{N} & -\mu-\delta & \frac{\beta S^*}{N} \\ 0 & \delta & -\mu-\gamma \end{bmatrix}$$

Kemudian hitung $\det\left(\lambda I - J\left(\frac{b}{\mu},0,0\right)\right) = 0$

$$\det\left(\begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -\mu-\frac{\beta I^*}{N} & 0 & -\frac{\beta S^*}{N} \\ \frac{\beta I^*}{N} & -\mu-\delta & \frac{\beta S^*}{N} \\ 0 & \delta & -\mu-\gamma \end{bmatrix}\right) = 0$$

$$\det\begin{bmatrix} \lambda+\mu+\frac{\beta I^*}{N} & 0 & \frac{\beta S^*}{N} \\ -\frac{\beta I^*}{N} & \lambda+\mu+\delta & -\frac{\beta S^*}{N} \\ 0 & -\delta & \lambda+\mu+\gamma \end{bmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(\left(\lambda+\mu+\frac{\beta I^*}{N}\right)(\lambda+\mu+\delta)(\lambda+\mu+\gamma)\right) + \left(\left(\frac{\beta S^*}{N}\right)\left(-\frac{\beta I^*}{N}\right)(-\delta)\right)$$

$$- \left(\left(\lambda+\mu+\frac{\beta I^*}{N}\right)\left(-\frac{\beta S^*}{N}\right)(-\delta)\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(\lambda+\mu+\frac{\beta I^*}{N}\right)(\lambda+\mu+\delta)(\lambda+\mu+\gamma) - \left(\lambda+\mu+\frac{\beta I^*}{N}\right)\left(\frac{\beta S^*}{N}\right)(\delta)$$

$$+ \left(\frac{\beta S^*}{N}\right)\left(\frac{\beta I^*}{N}\right)\delta = 0$$

misal : $x = \mu + \frac{\beta I^*}{N}, y = \mu+\delta, z = \mu+\gamma,\ t = \left(\frac{\beta S^*}{N}\right)(\delta)$, maka

$$\Leftrightarrow (\lambda+x)(\lambda+y)(\lambda+z) - \left((\lambda+x)t\right) + \left(\frac{\beta S^*}{N}\right)\left(\frac{\beta I^*}{N}\right)\delta = 0$$

$$\Leftrightarrow \lambda^3 + (x+y+z)\lambda^2 + (xy+xz+yz)\lambda + xyz - \lambda t - xt\ +\ t\left(\frac{\beta I^*}{N}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \lambda^3 + (x+y+z)\lambda^2 + (xy+xz+yz)\lambda - \lambda t + xyz - xt\ +\ t\left(\frac{\beta I^*}{N}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \lambda^3 + (x+y+z)\lambda^2 + (xy+xz+yz-t)\lambda + xyz - xt\ +\ t\left(\frac{\beta I^*}{N}\right) = 0$$

Persamaan karakteristik di atas dapat ditulis sebagai berikut :

$$\lambda^3 + a_1\lambda^2 + a_2\lambda + a_3 = 0$$

dengan

$$a_1 = x + y + z$$

$$a_2 = xy + xz + yz - t$$

$$a_3 = xyz - xt + t\left(\frac{\beta I^*}{N}\right)$$

Selanjutnya akan digunakan kriteria Routh-Hurwitz untuk menentukan kestabilannya, dengan kriteria berikut : $a_3 > 0$, $a_1 > 0$, $a_1 a_2 > a_3$.

- $a_3 = xyz - xt + t\left(\frac{\beta I^*}{N}\right)$

  Subsitusikan nilai $t = \left(\frac{\beta S^*}{N}\right)(\delta)$

  Subsitusikan $S^* = \frac{(\mu+\delta)(\mu+\gamma)}{\delta\beta} N$ sehingga

$$= xyz - x\left(\frac{\beta \frac{(\mu+\delta)(\mu+\gamma)}{\delta\beta} N}{N}\right)\delta + \left(\frac{\beta \frac{(\mu+\delta)(\mu+\gamma)}{\delta\beta} N}{N}\right)\left(\frac{\beta I^*}{N}\right)$$

$$= xyz - x(\mu+\delta)(\mu+\gamma) + (\mu+\delta)(\mu+\gamma)\frac{\beta I^*}{N}$$

  Karena $y = (\mu+\delta), z = (\mu+\gamma)$ maka

$$= xyz - xyz + (\mu+\delta)(\mu+\gamma)\frac{\beta I^*}{N}$$

$$= (\mu+\delta)(\mu+\gamma)\frac{\beta I^*}{N}$$

  Jadi, $a_3 > 0$.

- $a_1 = x + y + z$

$$= \mu + \frac{\beta I^*}{N} + \mu + \delta + \mu + \gamma$$

  Jadi, $a_1 > 0$.

- $a_1 a_2 > a_3$

$$a_1 a_2 - a_3 = (x+y+z)(xy+xz+yz-t) - \left(xyz - xt + t\left(\frac{\beta I^*}{N}\right)\right)$$

$$= (x+y+z)(xy+xz+yz-t) - xyz + xt - t\left(\frac{\beta I^*}{N}\right)$$

$$= x^2y + x^2z + xyz - xt + xy^2 + xyz + y^2z - yt + xyz$$
$$+ xz^2 + yz^2 - zt - xyz + xt - t\left(\frac{\beta I^*}{N}\right)$$
$$= x^2y + x^2z + xyz + xy^2 + xyz + y^2z + xz^2 + yz^2 - yt$$
$$- zt - t\left(\frac{\beta I^*}{N}\right)$$
$$= x^2y + x^2z + xyz + xy^2 + xyz + y^2z + xz^2 + yz^2 - y^2z$$
$$- yz^2 - t\left(\frac{\beta I^*}{N}\right)$$
$$= x^2y + x^2z + xyz + xy^2 + xyz + xz^2 - t\left(\frac{\beta I^*}{N}\right)$$
$$= x^2y + x^2z + xyz + xy^2 + xz^2 + xyz - yz\left(\frac{\beta I^*}{N}\right)$$
$$= x^2y + x^2z + xyz + xy^2 + xz^2 + xyz - \left(\frac{\beta I^*}{N}\right)yz$$
$$= x^2y + x^2z + xyz + xy^2 + xz^2 + xyz - \left(\frac{\beta I^*}{N}\right)yz$$
$$= x^2y + x^2z + xyz + xy^2 + xz^2 + (\mu + \frac{\beta I^*}{N})yz - \left(\frac{\beta I^*}{N}\right)yz$$
$$= x^2y + x^2z + xyz + xy^2 + xz^2 + (\mu yz + \frac{\beta I^*}{N}yz) - \left(\frac{\beta I^*}{N}\right)yz$$
$$= x^2y + x^2z + xyz + xy^2 + xz^2 + \mu yz$$

Berdasarkan penyelesaian di atas, diperoleh $a_1a_2 > a_3$.

Berdasarkan kriteria Berdasarkan kriteria Routh-Hurwits, maka titik ekuilibrium $(S^*, E^*, I^*) = \left(\frac{(\mu+\delta)(\mu+\gamma)N}{\delta\beta}\right), \left(\frac{b - \frac{\mu N(\mu+\delta)(\mu+\gamma)}{\delta\beta}}{(\mu+\delta)}\right),$ $\left(\frac{b - \frac{\mu N(\mu+\delta)(\mu+\gamma)}{\delta\beta}}{\frac{(\mu+\delta)(\mu+\gamma)}{\delta}}\right)$ stabil asimtotik lokal.

BAB III

METODOLOGI PENELITIAN

Metodologi penelitian dalam tugas akhir ini adalah studi literatur dengan mempelajari buku-buku dan jurnal-jurnal yang berhubungan dengan penyakit epidemi, khususnya model SEIR. Adapun langkah-langkahnya adalah sebagai berikut :

a) Menentukan asumsi dan mendefinisikan parameter yang digunakan pada model SEIR dengan asumsi adanya vaksinasi dan adanya migrasi.
b) Menggambar diagram transfer untuk membentuk model matematika. Diagram transfer berfungsi untuk membentuk sistem persamaan differensialnya.
c) Menyelesaikan sistem persamaan differensial.
d) Mencari titik ekuilibrium model. Titik ekuilibrium yang akan dicari adalah titik ekuilibrium bebas penyakit dan titik ekuilibrium endemik penyakit.
e) Menganalisa sifat kestabilan titik ekuilibrium. Setelah titik ekuilibrium diperoleh, maka diselidiki kestabilan dari titik kesetimbangan bebas penyakit dan endemik penyakit. Untuk menganalisa sifat kestabilan titik ekuilibrium dilakukan linearisasi pada sistem dengan menentukan matriks Jacobian di titik ekuilibrium. Kemudian dengan menggunakan definisi polinomial karakteristik diperoleh nilai eigen dari matriks dan ditentukan sifat kestabilannya berdasarkan Teorema (2.1). Salah satu alternatif menentukan nilai eigen dari polinomial karakteristik adalah dengan menggunakan kriteria Routh-Hurwitz.
f) Menginterpretasikan hasil yang diperoleh untuk mengetahui jumlah individu yang harus divaksinasi agar tidak terjadi endemik penyakit.
g) Mensimulasikan model dengan mendefinisikan nilai parameter dan digambarkan dengan menggunakan *software Maple* 13.

BAB IV
PEMBAHASAN DAN HASIL

Bab ini merupakan pengembangan dari model SEIR penyakit campak yang telah dibahas pada bab II. Adapun pengembangannya berupa adanya asumsi vaksinasi dan terjadinya migrasi yang berupa imigrasi dan emigrasi di suatu populasi. Faktor vaksinasi diperhatikan karena vaksin *Measles Mumps Rubella* atau yang lebih dikenal dengan vaksin *MMR* dapat mencegah meluasnya penyebaran penyakit campak. Selain itu perpindahan penduduk atau migrasi memungkinkan terjadinya penyebaran penyakit campak yang dibawa masuk atau keluar oleh suatu populasi kedalam suatu wilayah.

4.1 Asumsi-Asumsi dalam Model

Adapun asumsi pada model SEIR pada penyakit campak ini adalah:

a. Faktor kelahiran dan kematian diperhatikan. Individu yang lahir masuk ke kelas *Susceptible* (S) karena individu diasumsikan sehat tetapi rentan terhadap penyakit campak.
b. Dalam populasi terjadi proses migrasi. Imigrasi diasumsikan terjadi di kelas *Susceptible* (S), dan imigran yang masuk ke populasi dipastikan individu yang tidak terinfeksi penyakit campak. Sedangkan emigrasi masuk ke tiap kelas (*Susceptible, Exposed, Infected, Recovered*).
c. Penyakit dapat menyebabkan kematian (fatal).
d. Individu yang divaksinasi masuk kedalam kelas *Recovered* (R). Keampuhan vaksinasi adalah 100%, hal ini berarti setiap individu yang telah mendapatkan vaksinasi akan kebal terhadap penyakit. Sedangkan individu yang tidak mendapatkan vaksinasi masuk ke kelas *Susceptible* (S) dan berpotensi untuk terinfeksi penyakit campak.

Berdasarkan asumsi diatas, dapat didefinisikan parameter model sebagai berikut :

b menyatakan laju kelahiran pada kelas *Susceptible* (S)

μ menyatakan laju kematian alami

β menyatakan laju kontak

δ menyatakan laju infeksi pada kelas *Exposed*

γ menyatakan laju kesembuhan pada kelas *Infected*

α menyatakan laju kematian akibat penyakit campak pada kelas *Infected*

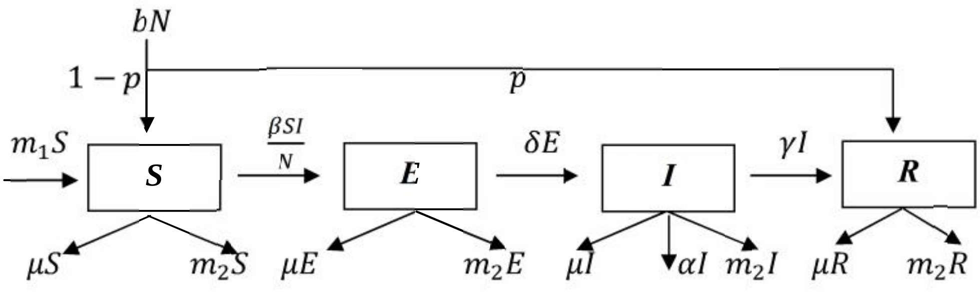
p menyatakan proporsi keberhasilan vaksinasi

m_1 menyatakan laju imigrasi

m_2 menyatakan laju emigrasi

4.2 Model SEIR dengan Vaksinasi dan Adanya Migrasi

Berdasarkan asumsi-asumsi di atas, maka diperoleh diagram transfer berikut :



Gambar 4.1 Model SEIR pada Penyakit Campak dengan Vaksinasi dan Adanya Migrasi

Berdasarkan diagram transfer di atas diperoleh sistem persamaan differensial sebagai berikut :

$$\frac{dS}{dt} = b(1-p)N + m_1 S - \frac{\beta SI}{N} - \mu S - m_2 S \tag{4.1.a}$$

$$\frac{dE}{dt} = \frac{\beta SI}{N} - \delta E - \mu E - m_2 E \tag{4.1.b}$$

$$\frac{dI}{dt} = \delta E - \gamma I - \mu I - \alpha I - m_2 I \tag{4.1.c}$$

$$\frac{dR}{dt} = bpN + \gamma I - m_2 R - \mu R \tag{4.1.d}$$

Sistem (4.1) mempunyai solusi (S, E, I, R) sebagai himpunan berikut :

$\Phi = \{(S, E, I, R) | S \geq 0, E \geq 0, I \geq 0, R \geq 0, S + E + I + R = N\}$.

Pada sistem (4.1) variabel R tidak muncul pada persamaan (4.1.a), (4.1.b) dan (4.1.c). Hal ini menunjukkan bahwa jumlah individu pada kelas R tidak mempengaruhi laju perubahan jumlah individu pada kelas S, E maupun kelas I. Dengan demikian nilai R dapat diabaikan dan sistem persamaan (4.1) dapat dibentuk menjadi sistem persamaan (4.2) sebagai berikut :

$$\frac{dS}{dt} = b(1-p)N + m_1 S - \frac{\beta SI}{N} - \mu S - m_2 S \quad (4.2.a)$$

$$\frac{dE}{dt} = \frac{\beta SI}{N} - \delta E - \mu E - m_2 E \quad (4.2.b)$$

$$\frac{dI}{dt} = \delta E - \gamma I - \mu I - \alpha I - m_2 I \quad (4.2.c)$$

Adapun solusi dari sistem (4.2) adalah himpunan $\Omega = \{(S,E,I) | S \geq 0, E \geq 0, I \geq 0, \ S + E + I \leq N\}$.

4.3 Titik Ekuilibrium

Titik ekuilibrium dari sistem (4.2) di atas diperoleh dengan menjadikan ruas kanan masing-masing persamaan sama dengan nol, atau $\frac{dS}{dt} = 0$, $\frac{dE}{dt} = 0$, $\frac{dI}{dt} = 0$. Titik ekuilibrium yang akan dicari ada dua, yaitu titik ekuilibrium bebas penyakit dan titik ekuilibrium endemik penyakit.

4.3.1 Titik ekuilibrium bebas penyakit

Pada titik ekuilibrium bebas penyakit berarti di dalam populasi tidak ada individu yang dapat menyebarkan penyakit campak atau tidak ada individu yang terserang penyakit campak, $I = 0$. Sehingga untuk titik ekuilibrium bebas penyakit yang dinotasikan dengan $\hat{I}$, yaitu $\hat{I} = 0$.

Dari persamaan (4.2.c) diperoleh

$$\delta E - \gamma I - \mu I - \alpha I - m_2 I = 0$$

$$\delta E - (\gamma + \mu + \alpha + m_2) I = 0$$

$$\delta E = (\gamma + \mu + \alpha + m_2) I$$

Karena $\hat{I} = 0$, maka

$$\delta E = 0$$

$$E = 0$$

Maka diperoleh titik ekuilibrium bebas penyakit yang dinotasikan dengan $\hat{E}$, dengan $\hat{E} = 0$. Setelah diperoleh titik ekuilibrium $\hat{E}$, selanjutnya dicari titik ekuilibrium $\hat{S}$ dengan menyelesaikan persamaan (4.2.a) berikut :

$$b(1-p)N + m_1S - \frac{\beta SI}{N} - \mu S - m_2S = 0$$

Karena $\hat{I} = 0$, maka

$$b(1-p)N + m_1S - 0 - \mu S - m_2S = 0$$

$$b(1-p)N - (-m_1 + \mu + m_2)S = 0$$

$$(-m_1 + \mu + m_2)S = b(1-p)N$$

$$S = \frac{b(1-p)N}{(-m_1+\mu+m_2)}$$

Maka titik ekuilibrium endemik penyakit S dinotasikan dengan $\widehat{S}$, yaitu $\widehat{S} = \frac{b(1-p)N}{(-m_1+\mu+m_2)}$, dengan $\mu + m_2 > m_1$.

Berdasarkan penyelesaian di atas, maka diperoleh titik ekuilibrium bebas penyakit $(\widehat{S}, \hat{E}, \hat{I}) = (\frac{b(1-p)N}{(-m_1+\mu+m_2)}, 0,0)$.

4.3.2 Titik ekuilibrium endemik penyakit

Titik ekuilibrium endemik penyakit yaitu di dalam populasi selalu terdapat individu yang terserang penyakit campak, $I^* > 0$.

Dari persamaan 4.2.c diperoleh

$$\delta E - \gamma I - \mu I - \alpha I - m_2 I = 0$$

$$\delta E - (\gamma + \mu + \alpha + m_2)I = 0$$

$$\delta E = (\gamma + \mu + \alpha + m_2)I$$

$$E = \frac{(\gamma+\mu+\alpha+m_2)}{\delta} I \tag{4.4}$$

Untuk memperoleh titik kesetimbangan S^* maka dari persamaan (4.2.b) diperoleh

$$\frac{\beta SI}{N} - \delta E - \mu E - m_2 E = 0$$

$$\frac{\beta SI}{N} - (\delta + \mu + m_2)E = 0$$

Subsitusikan nilai $E = \frac{(\gamma+\mu+\alpha+m_2)}{\delta} I$ pada persamaan (4.4) sehingga persamaannya menjadi

$$\frac{\beta SI}{N} - (\delta + \mu + m_2)\frac{(\gamma + \mu + \alpha + m_2)I}{\delta} = 0$$

$$\left(\frac{\beta S}{N} - (\delta + \mu + m_2)\frac{(\gamma + \mu + \alpha + m_2)}{\delta}\right)I = 0$$

Karena $I > 0$, maka hal ini berarti $I \neq 0$

$$\frac{\beta S}{N} - (\delta + \mu + m_2)\frac{(\gamma + \mu + \alpha + m_2)}{\delta} = 0$$

$$\frac{\beta S}{N} = (\delta + \mu + m_2)\frac{(\gamma + \mu + \alpha + m_2)}{\delta}$$

$$S = (\delta + \mu + m_2)\frac{(\gamma + \mu + \alpha + m_2)}{\delta}\frac{N}{\beta}$$

Sehingga titik ekuilibrium endemik penyakit S yang dinotasikan dengan S^* adalah

$$S^* = \frac{(\delta + \mu + m_2)(\gamma + \mu + \alpha + m_2)N}{\delta\beta}$$

Setelah nilai S^* diperoleh, selanjutnya dicari titik ekuilibrium I^* dengan menyelesaikan persamaan (4.2.a) berikut

$$b(1-p)N + m_1 S - \frac{\beta SI}{N} - \mu S - m_2 S = 0$$

$$\frac{\beta SI}{N} = b(1-p)N + m_1 S - \mu S - m_2 S$$

$$\frac{\beta SI}{N} = b(1-p)N - (-m_1 + \mu + m_2)S$$

$$I = (b(1-p)N - (-m_1 + \mu + m_2)S)\frac{N}{\beta S}$$

$$I = \frac{b(1-p)NN - (-m_1 + \mu + m_2)S^*N}{\beta S^*}$$

Subsitusikan $S = \frac{(\delta+\mu+m_2)(\gamma+\mu+\alpha+m_2)N}{\delta\beta}$ sehingga diperoleh

$$I = \frac{b(1-p)NN - (-m_1 + \mu + m_2)\left(\frac{(\delta + \mu + m_2)(\gamma + \mu + \alpha + m_2)N}{\delta\beta}\right)N}{\beta\left(\frac{(\delta + \mu + m_2)(\gamma + \mu + \alpha + m_2)N}{\delta\beta}\right)}$$

Persamaan di atas dapat disederhanakan menjadi bentuk di bawah ini dan merupakan titik ekuilibrium endemik penyakit yang dinotasikan dengan I^*.

$$I^* = \frac{b(1-p)N - \frac{(-m_1 + \mu + m_2)(\delta + \mu + m_2)(\gamma + \mu + \alpha + m_2)N}{\delta\beta}}{\frac{(\delta + \mu + m_2)(\gamma + \mu + \alpha + m_2)}{\delta}}$$

Setelah diperoleh I^* kemudian dicari nilai E^*. Dari persamaan (4.4) diperoleh

$$E = \frac{(\gamma + \mu + \alpha + m_2)I}{\delta}$$

Subsitusikan $I = \frac{b(1-p)N - \frac{(-m_1+\mu+m_2)(\delta+\mu+m_2)(\gamma+\mu+\alpha+m_2)N}{\delta\beta}}{\frac{(\delta+\mu+m_2)(\gamma+\mu+\alpha+m_2)}{\delta}}$ ke persamaan di atas sehingga persamaan di atas menjadi

$$E = \frac{(\gamma + \mu + \alpha + m_2)}{\delta} \frac{b(1-p)N - \frac{(-m_1 + \mu + m_2)(\delta + \mu + m_2)(\gamma + \mu + \alpha + m_2)N}{\delta\beta}}{\frac{(\delta + \mu + m_2)(\gamma + \mu + \alpha + m_2)}{\delta}}$$

$$E = \left(b(1-p)N - \frac{(-m_1 + \mu + m_2)(\delta + \mu + m_2)(\gamma + \mu + \alpha + m_2)N}{\delta\beta}\right)\frac{1}{(\delta + \mu + m_2)}$$

Berdasarkan penyelesaian di atas, maka diperoleh titik ekuilibrium endemik penyakit $(S^*, E^*, I^*) =$

$$\left(\frac{(\delta + \mu + m_2)(\gamma + \mu + \alpha + m_2)N}{\delta\beta},\right.$$

$$\frac{\left(b(1-p)N - \frac{(-m_1 + \mu + m_2)(\delta + \mu + m_2)(\gamma + \mu + \alpha + m_2)N}{\delta\beta}\right)}{(\delta + \mu + m_2)(\gamma + \mu + \alpha + m_2)},$$

$$\left(b(1-p)N\right.$$

$$\left.\left. - \frac{(-m_1 + \mu + m_2)(\delta + \mu + m_2)(\gamma + \mu + \alpha + m_2)N}{\delta\beta}\right)\frac{1}{(\delta + \mu + m_2)}\right)$$

Untuk mengetahui tingkat penyebaran penyakit campak diperlukan parameter tertentu. Parameter yang biasa digunakan dalam penyebaran penyakit adalah bilangan reproduksi dasar dan dinotasikan dengan R_0. Nilai R_0 diperoleh dengan cara sebagai berikut :

$$I^* > 0$$

$$\frac{b(1-p) - \frac{(-m_1+\mu+m_2)(\delta+\mu+m_2)(\gamma+\mu+\alpha+m_2)}{\delta\beta}}{\frac{(\delta+\mu+m_2)(\gamma+\mu+\alpha+m_2)}{\delta}} > 0$$

$$b(1-p) - \frac{(-m_1+\mu+m_2)(\delta+\mu+m_2)(\gamma+\mu+\alpha+m_2)}{\delta\beta} > 0$$

$$b(1-p) > \frac{(-m_1+\mu+m_2)(\delta+\mu+m_2)(\gamma+\mu+\alpha+m_2)}{\delta\beta}$$

$$b(1-p)\beta\delta > (-m_1+\mu+m_2)(\delta+\mu+m_2)(\gamma+\mu+\alpha+m_2)$$

Karena $b(1-p)\beta\delta > (-m_1+\mu+m_2)(\delta+\mu+m_2)(\gamma+\mu+\alpha+m_2)$ maka dapat didefinisikan bilangan reproduksi dasar (R_0) sebagai berikut :

$$R_0 = \frac{b(1-p)\beta\delta}{(-m_1+\mu+m_2)(\delta+\mu+m_2)(\gamma+\mu+\alpha+m_2)}$$

Jika $R_0 < 1$ maka hal ini berarti bahwa tidak terjadi endemik pada penyakit campak dan jumlah penderita penyakit campak akan semakin berkurang serta menyebabkan penyakit campak akan menghilang dari populasi. Tetapi jika $R_0 > 1$ maka akan terjadi endemik penyakit campak atau penyakit campak akan selalu ada di dalam suatu populasi.

4.4 Kestabilan Titik Ekuilibrium

Untuk menentukan sifat kestabilan sistem, maka digunakan Matriks Jacobian. Matriks Jacobian dari model SEIR adalah :

$$Jf(S,E,I) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial S} & \frac{\partial f_1}{\partial E} & \frac{\partial f_1}{\partial I} \\ \frac{\partial f_2}{\partial S} & \frac{\partial f_2}{\partial E} & \frac{\partial f_2}{\partial I} \\ \frac{\partial f_3}{\partial S} & \frac{\partial f_3}{\partial E} & \frac{\partial f_3}{\partial I} \end{bmatrix}$$

dengan $f_1\ (S,E,I)$, $f_2\ (S,E,I)$, dan $f_3\ (S,E,I)$ sebagai berikut :

$$b(1-p)N + m_1S - \frac{\beta SI}{N} - \mu S - m_2S = f_1\ (S,E,I)$$

$$\frac{\beta SI}{N} - \delta E - \mu E - m_2E = f_2\ (S,E,I)$$

$$\delta E - \gamma I - \mu I - \alpha I - m_2I = f_3\ (S,E,I)$$

Kemudian $f_1\ (S,E,I)$, $f_2\ (S,E,I)$, dan $f_3\ (S,E,I)$ diturunkan secara parsial terhadap variabel S, E, dan I.

- Turunan $f_1\ (S,E,I)$ terhadap S

$$\frac{\partial f_1}{\partial S} = b(1-p) + m_1 - \frac{\beta I}{N} - \mu - m_2$$

- Turunan $f_1\ (S,E,I)$ terhadap E

$$\frac{\partial f_1}{\partial E} = b(1-p)$$

- Turunan $f_1\ (S,E,I)$ terhadap I

$$\frac{\partial f_1}{\partial I} = b(1-p) - \frac{\beta S}{N}$$

- Turunan $f_2\ (S,E,I)$ terhadap S

$$\frac{\partial f_2}{\partial S} = \frac{\beta I}{N}$$

- Turunan $f_2\ (S,E,I)$ terhadap E

$$\frac{\partial f_2}{\partial E} = -\delta - \mu - m_2$$

- Turunan $f_2\ (S,E,I)$ terhadap I

$$\frac{\partial f_2}{\partial I} = \frac{\beta S}{N}$$

- Turunan $f_3\ (S,E,I)$ terhadap S

$$\frac{\partial f_3}{\partial S} = 0$$

- Turunan $f_3\ (S,E,I)$ terhadap E

$$\frac{\partial f_3}{\partial E} = \delta$$

- Turunan $f_3\ (S,E,I)$ terhadap I

$$\frac{\partial f_3}{\partial I} = -\gamma - \mu - \alpha - m_2$$

Maka matriks Jacobian dari penyelesaian di atas adalah :

$$Jf(S,E,I)$$

$$= \begin{bmatrix} b(1-p)+m_1-\frac{\beta I}{N}-\mu-m_2 & b(1-p) & b(1-p)-\frac{\beta S}{N} \\ \frac{\beta I}{N} & -\delta-\mu-m_2 & \frac{\beta S}{N} \\ 0 & \delta & -\mu-\gamma-\alpha-m_2 \end{bmatrix}$$

Teorema 4.1 Jika $R_0 < 1$ maka titik ekuilibrium bebas penyakit $(\hat{S},\hat{E},\hat{I}) = (\frac{b(1-p)N}{(-m_1+\mu+m_2)}, 0,0)$ pada sistem (4.2) stabil asimtotik lokal.

Bukti :

Matriks Jacobian $Jf\left((\hat{S},0,0)\right)$ dari matriks Jacobian di atas adalah :

$$Jf(\hat{S},0,0) = \begin{bmatrix} b(1-p)+m_1-\ 0-\mu-m_2 & b(1-p) & b(1-p)-\frac{\beta\hat{S}}{N} \\ 0 & -\delta-\mu-m_2 & \frac{\beta\hat{S}}{N} \\ 0 & \delta & -\mu-\gamma-\alpha-m_2 \end{bmatrix}$$

Kemudian hitung $\det\left(\lambda I - J(S^*,0,0)\right) = 0$

$$\det\left(\begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} b(1-p)+m_1-\mu-m_2 & b(1-p) & b(1-p)-\frac{\beta\hat{S}}{N} \\ 0 & -\delta-\mu-m_2 & \frac{\beta\hat{S}}{N} \\ 0 & \delta & -\mu-\gamma-\alpha-m_2 \end{bmatrix}\right) = 0$$

$$\det\begin{bmatrix} \lambda-b(1-p)-m_1+\mu+m_2 & -b(1-p) & -b(1-p)+\frac{\beta\hat{S}}{N} \\ 0 & \lambda+\mu+\delta+m_2 & -\frac{\beta\hat{S}}{N} \\ 0 & -\delta & \lambda+\mu+\gamma+\alpha+m_2 \end{bmatrix} = 0$$

Persamaan karakteristik dari $\det\left(\lambda I - J(\hat{S},0,0)\right)$ adalah:

$$\Leftrightarrow (\lambda-b(1-p)-m_1+\mu+m_2)(\lambda+\mu+\delta+m_2)(\lambda+\mu+\gamma+\alpha+m_2)$$

$$-(\lambda-b(1-p)-m_1+\mu+m_2)\left(-\frac{\beta\hat{S}}{N}\right)-\delta = 0$$

$$\Leftrightarrow (\lambda - b(1-p) - m_1 + \mu + m_2)(\lambda + \mu + \delta + m_2)(\lambda + \mu + \gamma + \alpha + m_2)$$

$$-(\lambda - b(1-p) - m_1 + \mu + m_2)\frac{\beta\hat{S}}{N}\delta = 0$$

Misal :

$b(1-p) = w$

$-m_1 + \mu + m_2 = x$

$\mu + \delta + m_2 = y$

$\mu + \gamma + \alpha + m_2 = z$

$$\Leftrightarrow (\lambda - w + x)(\lambda + y)(\lambda + z) - (\lambda - w + x)\frac{\beta\hat{S}}{N}\delta = 0$$

$$\Leftrightarrow (\lambda - w + x)(\lambda^2 + y\lambda + z\lambda + yz) - (\lambda - w + x)\frac{\beta\hat{S}}{N}\delta = 0$$

$$\Leftrightarrow (\lambda^3 + y\lambda^2 + z\lambda^2 + yz\lambda - w\lambda^2 - wy\lambda - wz\lambda - wyz + x\lambda^2 + xy\lambda + xz\lambda$$

$$+ xyz - (\lambda - w + x)\frac{\beta\hat{S}}{N}\delta = 0$$

$$\Leftrightarrow \lambda^3 + y\lambda^2 + z\lambda^2 + yz\lambda - w\lambda^2 - wy\lambda - wz\lambda - wyz + x\lambda^2 + xy\lambda + xz\lambda + xyz$$

$$-\left(\frac{\beta\hat{S}}{N}\delta\lambda - \frac{\beta\hat{S}}{N}\delta w + \frac{\beta\hat{S}}{N}\delta x\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \lambda^3 + y\lambda^2 + z\lambda^2 - w\lambda^2 + x\lambda^2 + yz\lambda - wy\lambda - wz\lambda + xy\lambda + xz\lambda - \frac{\beta\hat{S}}{N}\delta\lambda$$

$$+ xyz - wyz + \frac{\beta\hat{S}}{N}\delta w - \frac{\beta\hat{S}}{N}\delta x = 0$$

$$\Leftrightarrow \lambda^3 + (y + z - w + x)\lambda^2 + \left(yz - wy - wz + xy + xz - \frac{\beta\hat{S}}{N}\delta\right)\lambda + xyz$$

$$- wyz + \frac{\beta\hat{S}}{N}\delta w - \frac{\beta\hat{S}}{N}\delta x = 0$$

Subsitusikan $\hat{S} = \frac{b(1-p)N}{(-m_1+\mu+m_2)}$ sehingga

$$\Leftrightarrow \lambda^3 + (y + z - w + x)\lambda^2$$

$$+\left(yz - wy - wz + xy + xz - \beta\delta\frac{b(1-p)}{(-m_1 + \mu + m_2)}\right)\lambda$$

$$+xyz - wyz + \beta\delta w\frac{b(1-p)}{(-m_1 + \mu + m_2)} - \beta\delta x\frac{b(1-p)}{(-m_1 + \mu + m_2)} = 0$$

Karena $b(1-p) = w$ dan $(-m_1 + \mu + m_2) = x$ maka

$$\Leftrightarrow \lambda^3 + (y + z - w + x)\lambda^2 + \left(yz - wy - wz + xy + xz - \beta\delta\frac{w}{x}\right)\lambda + xyz$$

$$-wyz + \beta\delta w\frac{w}{x} - \beta\delta w = 0$$

Maka diperoleh persamaan karakteristik

$$\lambda^3 + a_1\lambda^2 + a_2\lambda + a_3 = 0$$

dengan

$$a_1 = y + z - w + x$$

$$a_2 = yz - wy - wz + xy + xz - \beta\delta\frac{w}{x}$$

$$a_3 = xyz - wyz + \beta\delta w\frac{w}{x} - \beta\delta w$$

Untuk menentukan sifat kestabilannya, digunakan teorema (2.2) dengan kriteria : $a_1 > 0$, $a_3 > 0$ dan $a_1 a_2 > a_3$.

a. $a_1 = y + z - w + x$

Karena $\hat{S} = \frac{b(1-p)N}{(-m_1+\mu+m_2)} = \frac{wN}{x}$ dan $\hat{S} < N$ maka $\frac{wN}{x} < N \Leftrightarrow \frac{w}{x} < 1 \Leftrightarrow w < x \Leftrightarrow x - w > 0$. Jadi, $a_1 = y + z - w + x > 0$

b. $a_3 = xyz - wyz + \frac{\beta\delta ww}{x} - \beta\delta w$

$$= xyz - \beta\delta w - wyz + \frac{\beta\delta ww}{x}$$

$$= (xyz - \beta\delta w) + \left(\frac{\beta\delta ww}{x} - wyz\right)$$

$$= (xyz - \beta\delta w) - \left(-\frac{\beta\delta ww}{x} + wyz\right)$$

$$= (xyz - \beta\delta w) - \frac{w}{x}(-\beta\delta w - xyz)$$

$$= (xyz - \beta\delta w)\left(1 - \frac{w}{x}\right)$$

- Untuk $xyz - \beta\delta w > 0$, karena $R_0 = \frac{b(1-p)\beta\delta}{(-m_1+\mu+m_2)(\delta+\mu+m_2)(\gamma+\mu+\alpha+m_2)} < 1$ maka $b(1-p)\beta\delta < (-m_1 + \mu + m_2)(\delta + \mu + m_2)(\gamma + \mu + \alpha + m_2)$. Dan karena $b(1-p) = w$, $-m_1 + \mu + m_2 = x$, $\delta + \mu + m_2 = y$, dan $\gamma + \mu + \alpha + m_2 = z$ maka $w\beta\delta < xyz \Leftrightarrow xyz - w\beta\delta > 0$.

- Untuk $1 - \frac{w}{x} > 0$, karena $\hat{S} = \frac{b(1-p)N}{(-m_1+\mu+m_2)} = \frac{wN}{x}$ dan $\hat{S} < N$, maka $\frac{wN}{x} < N$ $\Leftrightarrow \frac{w}{x} < 1 \Leftrightarrow 1 - \frac{w}{x} > 0$.

  Berdasarkan pembahasan di atas, maka diperoleh $a_3 > 0$

c. $a_1 a_2 - a_3 = (y + z - w + x)\left(yz - wy - wz + xy + xz - \frac{\beta\delta w}{x}\right) - \left(xyz - wyz + \frac{\beta\delta ww}{x} - \beta\delta w\right)$

$$= (y+z)\left(yz - wy - wz + xy + xz - \frac{\beta\delta w}{x}\right)$$
$$+x\left(yz - wy - wz + xy + xz - \frac{\beta\delta w}{x}\right)$$
$$-w\left(yz - wy - wz + xy + xz - \frac{\beta\delta w}{x}\right) - xyz - wyz$$
$$-\frac{\beta\delta ww}{x} + \beta\delta w$$

$$= (y+z)\left(yz - wy - wz + xy + xz - \frac{\beta\delta w}{x}\right) + xyz - wxy$$
$$-wxz + x^2y + x^2z - \beta\delta w - wyz + w^2y + w^2z - wxy$$
$$-wxz + \frac{\beta\delta w}{x}w - xyz + wyz - \frac{\beta\delta ww}{x} + \beta\delta w$$

$$= (y+z)\left(yz - wy - wz + xy + xz - \frac{\beta\delta w}{x}\right) - 2wxy$$
$$-2wxz + x^2y + x^2z + w^2y + w^2z$$

$$= (y+z)\left(-wy + xy - wz + xz + yz - \frac{\beta\delta w}{x}\right)$$
$$+(y+z)(w^2 + x^2 - 2wx)$$

$$= (y+z)\left(y(-w+x) + z(-w+x) + yz - \frac{\beta\delta w}{x}\right)$$
$$+(y+z)(-w+x)^2$$

Karena $(-w + x) > 0$, maka $a_1 a_2 > 0$.

Berdasarkan pembahasan di atas, maka diperoleh titik ekuilibrium bebas penyakit stabil asimtotik.

Teorema 4.2 Jika $R_0 > 1$ maka titik ekuilibrium endemik penyakit (S^*, E^*, I^*) pada sistem (4.2) stabil asimtotik.

Bukti:

Matriks Jacobian dari $Jf(S^*, E^*, I^*)$ adalah :

$$Jf(S^*, E^*, I^*)$$
$$= \begin{bmatrix} b(1-p) + m_1 - \frac{\beta I^*}{N} - \mu - m_2 & b(1-p) & b(1-p) - \frac{\beta S^*}{N} \\ \frac{\beta I}{N} & -\delta - \mu - m_2 & \frac{\beta S^*}{N} \\ 0 & \delta & -\mu - \gamma - \alpha - m_2 \end{bmatrix}$$

Kemudian hitung $\det(\lambda I - J(S^*, E^*, I^*)) = 0$

$$\det\left(\begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} b(1-p) + m_1 - \frac{\beta I^*}{N} - \mu - m_2 & b(1-p) & b(1-p) - \frac{\beta S^*}{N} \\ \frac{\beta I}{N} & -\delta - \mu - m_2 & \frac{\beta S^*}{N} \\ 0 & \delta & -\mu - \gamma - \alpha - m_2 \end{bmatrix}\right) = 0$$

$$\det\begin{bmatrix} \lambda - b(1-p) - m_1 + \frac{\beta I^*}{N} + \mu + m_2 & -b(1-p) & -b(1-p) + \frac{\beta S^*}{N} \\ -\frac{\beta I}{N} & \lambda + \mu + \delta + m_2 & -\frac{\beta S^*}{N} \\ 0 & -\delta & \lambda + \mu + \gamma + \alpha + m_2 \end{bmatrix} = 0$$

Persamaan karakteristik dari $\det(\lambda I - J(S^*, E^*, I^*)) = 0$ di atas adalah

$$\Leftrightarrow \left(\lambda - b(1-p) - m_1 + \frac{\beta I^*}{N} + \mu + m_2\right)(\lambda + \mu + \delta + m_2)(\lambda + \mu + \gamma + \alpha + m_2)$$
$$+ \left(\left(-b(1-p) + \frac{\beta S^*}{N}\right)\left(-\frac{\beta I}{N}\right)(-\delta)\right) - b(1-p)\left(-\frac{\beta I}{N}\right)$$
$$(\lambda + \mu + \gamma + \alpha + m_2) - \left(\lambda - b(1-p) - m_1 + \frac{\beta I^*}{N} + \mu + m_2\right)\left(-\frac{\beta S^*}{N}\right)(-\delta) = 0$$

Selanjutnya akan digunakan pemisalan seperti pemisalan pada kestabilan titik ekuilibrium bebas penyakit berikut :

Misal :

$b(1-p) = w$

$-m_1 + \mu + m_2 = x$

$\mu + \delta + m_2 = y$

$\mu + \gamma + \alpha + m_2 = z$

Maka persamaan karakteristiknya akan menjadi

$$\Leftrightarrow \left(\lambda - w + x + \frac{\beta I^*}{N}\right)(\lambda + y)(\lambda + z) + \left(-w + \frac{\beta S^*}{N}\right)\frac{\beta I^*}{N}\delta - w\frac{\beta I^*}{N}(\lambda + z)$$

$$-\left(\lambda - w + x + \frac{\beta I^*}{N}\right)\left(-\frac{\beta S^*}{N}\right)(-\delta) = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(\lambda - w + x + \frac{\beta I^*}{N}\right)(\lambda^2 + y\lambda + z\lambda + yz) - w\frac{\beta I^*}{N}\delta + \frac{\beta S^*}{N}\frac{\beta I^*}{N}\delta - w\frac{\beta I^*}{N}\lambda$$

$$-w\frac{\beta I^*}{N}z - \left(\lambda - w + x + \frac{\beta I^*}{N}\right)\frac{\beta\delta S^*}{N} = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(\lambda - w + x + \frac{\beta I^*}{N}\right)(\lambda^2 + y\lambda + z\lambda + yz) - w\frac{\beta I^*}{N}\delta + \frac{\beta S^*}{N}\frac{\beta I^*}{N}\delta - w\frac{\beta I^*}{N}\lambda$$

$$-w\frac{\beta I^*}{N}z - \left(\lambda - w + x + \frac{\beta I^*}{N}\right)\frac{\beta\delta S^*}{N} = 0$$

$$\Leftrightarrow \lambda^3 + y\lambda^2 + z\lambda^2 + yz\lambda - w\lambda^2 - wy\lambda - wz\lambda - wyz + x\lambda^2 + xy\lambda + xz\lambda$$

$$+xyz + \frac{\beta I^*}{N}\lambda^2 + \frac{\beta I^*}{N}y\lambda + \frac{\beta I^*}{N}z\lambda + \frac{\beta I^*}{N}yz - w\frac{\beta I^*}{N}\delta + \frac{\beta S^*}{N}\frac{\beta I^*}{N}\delta$$

$$-w\frac{\beta I^*}{N}\lambda - w\frac{\beta I^*}{N}z - \left(\frac{\beta\delta S^*}{N}\lambda - \frac{\beta\delta S^*}{N}w + \frac{\beta\delta S^*}{N}x + \frac{\beta\delta S^*}{N}\frac{\beta I^*}{N}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \lambda^3 + y\lambda^2 + z\lambda^2 + yz\lambda - w\lambda^2 - wy\lambda - wz\lambda - wyz + x\lambda^2 + xy\lambda + xz\lambda$$

$$+xyz + \frac{\beta I^*}{N}\lambda^2 + \frac{\beta I^*}{N}y\lambda + \frac{\beta I^*}{N}z\lambda + \frac{\beta I^*}{N}yz - w\frac{\beta I^*}{N}\delta + \frac{\beta S^*}{N}\frac{\beta I^*}{N}\delta$$

$$-w\frac{\beta I^*}{N}\lambda - w\frac{\beta I^*}{N}z - \frac{\beta\delta S^*}{N}\lambda + \frac{\beta\delta S^*}{N}w - \frac{\beta\delta S^*}{N}x - \frac{\beta\delta S^*}{N}\frac{\beta I^*}{N} = 0$$

$$\Leftrightarrow \lambda^3 + y\lambda^2 + z\lambda^2 - w\lambda^2 + x\lambda^2 + \frac{\beta I^*}{N}\lambda^2 + yz\lambda - wy\lambda - wz\lambda + xy\lambda + xz\lambda$$

$$+\frac{\beta I^*}{N}y\lambda + \frac{\beta I^*}{N}z\lambda - \frac{\beta I^*}{N}w\lambda - \frac{\beta S^*}{N}\delta\lambda - wyz + xyz + \frac{\beta I^*}{N}yz - \frac{\beta I^*}{N}w\delta$$

$$+\frac{\beta S^*}{N}\frac{\beta I^*}{N}\delta - w\frac{\beta I^*}{N}z + \frac{\beta\delta S^*}{N}w - \frac{\beta\delta S^*}{N}x - \frac{\beta\delta S^*}{N}\frac{\beta I^*}{N} = 0$$

$$\Leftrightarrow \lambda^3 + \left(y + z - w + x + \frac{\beta I^*}{N}\right)\lambda^2$$

$$+\left(yz - wy - wz + xy + xz + \frac{\beta I^*}{N}y + \frac{\beta I^*}{N}z - \frac{\beta I^*}{N}w - \frac{\beta S^*}{N}\delta\right)\lambda$$

$$-wyz + xyz + \frac{\beta I^*}{N} yz - \frac{\beta I^*}{N} w\delta - \frac{\beta I^*}{N} wz + \frac{\beta S^*}{N}\delta w - \frac{\beta S^*}{N}\delta x = 0$$

Subsitusikan $\frac{\beta I^*}{N} = \frac{\beta}{N}\frac{b(1-p)N - \frac{(-m_1+\mu+m_2)(\delta+\mu+m_2)(\gamma+\mu+\alpha+m_2)N}{\delta\beta}}{\frac{(\delta+\mu+m_2)(\gamma+\mu+\alpha+m_2)}{\delta}}$ dan $\frac{\beta S^*}{N} = \frac{\beta}{N}\frac{(\delta+\mu+m_2)(\gamma+\mu+\alpha+m_2)N}{\delta\beta}$, dan karena $b(1-p) = w$, $(-m_1+\mu+m_2) = x$, $(\delta+\mu+m_2) = y$, dan $(\gamma+\mu+\alpha+m_2) = z$ maka $\frac{\beta I^*}{N} = \frac{\beta\delta w}{yz} - x$ dan $\frac{\beta S^*}{N} = \frac{yz}{\delta}$.

Subsitusikan $\frac{\beta I^*}{N} = \frac{\beta\delta w}{yz} - x$ dan $\frac{\beta S^*}{N} = \frac{yz}{\delta}$ sehingga

$$\Leftrightarrow \lambda^3 + \left(y + z - w + x + \left(\frac{\beta\delta w}{yz} - x\right)\right)\lambda^2$$
$$+ \left(yz - wy - wz + xy + xz + \left(\frac{\beta\delta w}{yz} - x\right)y + \left(\frac{\beta\delta w}{yz} - x\right)z - \left(\frac{\beta\delta w}{yz} - x\right)w - \frac{yz}{\delta}\delta\right)\lambda$$
$$-wyz + xyz + \left(\frac{\beta\delta w}{yz} - x\right)yz - \left(\frac{\beta\delta w}{yz} - x\right)w\delta - \left(\frac{\beta\delta w}{yz} - x\right)wz + \frac{yz}{\delta}\delta w - \frac{yz}{\delta}\delta x = 0$$

$$\Leftrightarrow \lambda^3 + \left(y + z - w + \frac{\beta\delta w}{yz}\right)\lambda^2$$
$$+ \left(yz - wy - wz + xy + xz + \frac{\beta\delta w}{yz}y - xy + \frac{\beta\delta w}{yz}z - xz - \frac{\beta\delta w}{yz}w + wx - yz\right)\lambda - wyz + xyz + \frac{\beta\delta w}{yz}yz - xyz - \frac{\beta\delta w}{yz}w\delta + wx\delta$$
$$- \frac{\beta\delta w}{yz}wz + wxz + wyz - xyz = 0$$

$$\Leftrightarrow \lambda^3 + \left(y + z - w + \frac{\beta\delta w}{yz}\right)\lambda^2$$
$$+ \left(-wy - wz + wx + \frac{\beta\delta w}{yz}y + \frac{\beta\delta w}{yz}z - \frac{\beta\delta w}{yz}w\right)\lambda + wx\delta + wxz - xyz$$
$$+ \frac{\beta\delta w}{yz}yz - \frac{\beta\delta w}{yz}w\delta - \frac{\beta\delta w}{yz}wz = 0$$

Persamaan di atas dapat ditulis menjadi :

$\lambda^3 + a_1\lambda^2 + a_2\lambda + a_3 = 0$

dengan

$$a_1 = y + z - w + \frac{\beta\delta w}{yz}$$

$$a_2 = -wy - wz + wx + \frac{\beta\delta w}{yz}y + \frac{\beta\delta w}{yz}z - \frac{\beta\delta w}{yz}w$$

$$a_3 = wx\delta + wxz - xyz + \frac{\beta\delta w}{yz}yz - \frac{\beta\delta w}{yz}w\delta - \frac{\beta\delta w}{yz}wz$$

Untuk menentukan kestabilan titik ekuilibrium endemik penyakit maka digunakan teorema (2.2) dengan kriteria $a_1 > 0$, $a_3 > 0$ dan $a_1 a_2 > a_3$.

a. $a_1 = y + z - w + \frac{\beta\delta w}{yz}$

$$= y + z + w\left(\frac{\beta\delta}{yz} - 1\right)$$

$$= y + z + \frac{w}{yz}(\beta\delta - yz)$$

Karena $S^* < N$, maka $\frac{yzN}{\beta\delta} < N \Leftrightarrow \frac{yz}{\beta\delta} < 1 \Leftrightarrow yz < \beta\delta \Leftrightarrow \beta\delta - yz > 0$.

Jadi, $a_1 > 0$.

b. $a_3 = wx\delta + wxz - xyz + \frac{\beta\delta w}{yz}yz - \frac{\beta\delta w}{yz}w\delta - \frac{\beta\delta w}{yz}wz$

$$= (\beta\delta w - xyz) + (xw\delta + xwz) + \left(-\frac{\beta\delta w}{yz}w\delta - \frac{\beta\delta w}{yz}wz\right)$$

$$= (\beta\delta w - xyz) + x(w\delta + wz) - \frac{\beta\delta w}{yz}(w\delta + wz)$$

$$= (\beta\delta w - xyz) + (w\delta + wz)\left(x - \frac{\beta\delta w}{yz}\right)$$

$$= (\beta\delta w - xyz) + \left(\frac{\beta\delta w}{yz} - x\right)(-w\delta - wz)$$

$$= (\beta\delta w - xyz) + \left(\frac{\beta\delta w - xyz}{yz}\right)(-w\delta - wz)$$

$$= (\beta\delta w - xyz) + (\beta\delta w - xyz)\frac{(-w\delta - wz)}{yz}$$

$$= (\beta\delta w - xyz)\left(1 + \frac{(-w\delta - wz)}{yz}\right)$$

$$= (\beta\delta w - xyz)\left(1 - \frac{w\delta + wz}{yz}\right)$$

- Untuk $\beta\delta w - xyz > 0$, karena $R_0 > 1$ atau $\beta\delta w > xyz \Leftrightarrow \beta\delta w - xyz > 0$.
- $1 - \frac{w\delta+wz}{yz} > 0$, karena $1 > \frac{w\delta+wz}{yz}$.

Berdasarkan pembahasan diatas, diperoleh bahwa $a_3 > 0$.

$$a_1a_2 - a_3 = \left(y + z - w + \frac{\beta\delta w}{yz}\right)\left(-wy - wz + xw + \frac{\beta\delta w}{yz}y + \frac{\beta\delta w}{yz}z - \frac{\beta\delta w}{yz}w\right)$$

$$-\left(\beta\delta w - \frac{\beta\delta w}{yz}w\delta + xw\delta - xyz - \frac{\beta\delta w}{yz}wz + xwz\right)$$

$$= y\left(-wy - wz + xw + \frac{\beta\delta w}{yz}y + \frac{\beta\delta w}{yz}z - \frac{\beta\delta w}{yz}w\right)$$

$$+z\left(-wy - wz + xw + \frac{\beta\delta w}{yz}y + \frac{\beta\delta w}{yz}z - \frac{\beta\delta w}{yz}w\right)$$

$$+\left(-w + \frac{\beta\delta w}{yz}\right)\left(-wy - wz + xw + \frac{\beta\delta w}{yz}y + \frac{\beta\delta w}{yz}z - \frac{\beta\delta w}{yz}w\right)$$

$$-\left(\beta\delta w - \frac{\beta\delta w}{yz}w\delta + xw\delta - xyz - \frac{\beta\delta w}{yz}wz + xwz\right)$$

$$= -wy^2 - wyz + xwy + \frac{\beta\delta w}{yz}y^2 + \frac{\beta\delta w}{yz}yz - \frac{\beta\delta w}{yz}wy$$

$$+\left(-wyz - wz^2 + xwz + \frac{\beta\delta w}{yz}yz + \frac{\beta\delta w}{yz}z^2 - \frac{\beta\delta w}{yz}wz\right)$$

$$+\left(-w + \frac{\beta\delta w}{yz}\right)\left(-wy - wz + xw + \frac{\beta\delta w}{yz}y + \frac{\beta\delta w}{yz}z - \frac{\beta\delta w}{yz}w\right)$$

$$-\beta\delta w + \frac{\beta\delta w}{yz}w\delta - xw\delta + xyz + \frac{\beta\delta w}{yz}wz - xwz$$

$$= -wy^2 - wyz + xwy + \frac{\beta\delta w}{yz}y^2 + \frac{\beta\delta w}{yz}yz - \frac{\beta\delta w}{yz}wy$$

$$-wyz - wz^2 + \frac{\beta\delta w}{yz}z^2$$

$$+\left(-w + \frac{\beta\delta w}{yz}\right)\left(-wy - wz + xw + \frac{\beta\delta w}{yz}y + \frac{\beta\delta w}{yz}z - \frac{\beta\delta w}{yz}w\right)$$

$$+\frac{\beta\delta w}{yz}w\delta - xw\delta + xyz$$

$$= -wy^2 + \frac{\beta\delta w}{yz}y^2 - wz^2 + \frac{\beta\delta w}{yz}z^2 - wyz + \frac{\beta\delta w}{yz}yz$$

$$-xw\delta + \frac{\beta\delta w}{yz}w\delta + xwy + xyz - \frac{\beta\delta w}{yz}wy - wyz$$

$$+\left(-w + \frac{\beta\delta w}{yz}\right)\left(-wy + \frac{\beta\delta w}{yz}y - wz + \frac{\beta\delta w}{yz}z + xw - \frac{\beta\delta w}{yz}w\right)$$

Karena $-w + \frac{\beta\delta w}{yz} > 0 \Leftrightarrow w\left(-1 + \frac{\beta\delta}{yz}\right) > 0$. Jadi, $a_1a_2 - a_3 > 0$.

Berdasarkan kriteria Routh-Hurwitz, maka titik kesetimbangan endemik penyakit (S^*, E^*, I^*) stabil asimtotik.

4.5 Jumlah Individu yang Divaksinasi

Berdasarkan pembahasan di atas, diperoleh

$$R_0 = \frac{b(1-p)\beta\delta}{(-m_1 + \mu + m_2)(\delta + \mu + m_2)(\gamma + \mu + \alpha + m_2)}$$

p pada bilangan reproduksi dasar di atas merupakan proporsi individu yang divaksinasi. Untuk mencegah menyebarnya penyakit, maka perlu didefinisikan tingkat vaksinasi minimum agar tidak terjadi endemik penyakit. Tingkat vaksinasi minimum dinotasikan dengan p_c.

Adapun tingkat vaksinasi minimum pada penyakit campak ini adalah sebagai berikut :

$$\Leftrightarrow R_0(1 - p_c) < 1$$

$$\Leftrightarrow (R_0 - R_0p_c) < 1$$

$$\Leftrightarrow -R_0p_c < 1 - R_0$$

$$\Leftrightarrow R_0p_c > R_0 - 1$$

$$\Leftrightarrow p_c > \frac{R_0 - 1}{R_0}$$

$$\Leftrightarrow p_c > 1 - \frac{1}{R_0}$$

Berdasarkan nilai p_c yang diperoleh di atas, maka agar tidak terjadi endemik pada penyakit campak tingkat vaksinasi minimum atau proporsi individu yang harus divaksinasi adalah $p_c > 1 - \frac{1}{R_0}$. Jika tingkat vaksinasi minimum terpenuhi, maka jumlah individu yang terkena penyakit campak akan berkurang dan didalam populasi tidak terjadi endemik penyakit campak.

4.6 Simulasi

a. Titik Ekuilibrium Bebas Penyakit

Sistem (4.1) dapat disederhanakan dengan menggunakan proporsi banyaknya individu pada masing-masing kelas yang dapat dinyatakan dengan $s = \frac{S}{N}$, $e = \frac{E}{N}$, $i = \frac{I}{N}$, dan $r = \frac{R}{N}$ sehingga persamaan (4.1) dapat dinyatakan sebagai berikut :

$$\frac{dS}{dt} = b(1-p) + m_1 s - \beta si - \mu s - m_2 s$$

$$\frac{de}{dt} = \beta si - \delta e - \mu e - m_2 e$$

$$\frac{di}{dt} = \delta e - \gamma i - \mu i - \alpha i - m_2 i$$

$$\frac{dr}{dt} = bp + \gamma i - m_2 r - \mu r \qquad (4.5)$$

Dengan mengambil parameter $b = 0{,}5,\ \beta = 0.8,\ p = 0{,}5,\ \mu = 0{,}4,$ $\delta = 0{,}6,\ \alpha = 0{,}1,\ \gamma = 0{,}03,\ m_1 = 0{,}2,\ m_2 = 0{,}1,\ n = 1.$ Subsitusikan nilai parameter ke sistem (4.1) sehingga diperoleh sistem berikut :

$$\frac{dS}{dt} = 0{,}5(1-0{,}5) + 0{,}2s - 0{,}8\,si - 0{,}4s - 0{,}1s$$

$$\frac{dE}{dt} = 0{,}8\,si - 0{,}6e - 0{,}4e - 0{,}1e$$

$$\frac{dI}{dt} = 0{,}6e - 0{,}03i - 0{,}4i - 0{,}1i - 0{,}1i$$

$$\frac{dr}{dt} = (0{,}5)(0{,}5) + 0{,}03i - 0{,}1r - 0{,}4r \qquad (4.6)$$

Titik ekuilibrium bebas penyakit adalah $(\hat{S},\hat{E},\hat{I}) = (\frac{b(1-p)N}{(-m_1+\mu+m_2)}, 0{,}0) = (0{,}833, 0, 0)$. Bilangan reproduksi dasar sebesar $R_0 = \frac{b(1-p)\beta\delta}{(-m_1+\mu+m_2)(\delta+\mu+m_2)(\gamma+\mu+\alpha+m_2)} = 0{,}5772.$ Untuk menentukan kestabilannya, maka subsitusikan nilai parameter ke matriks Jacobian berikut :

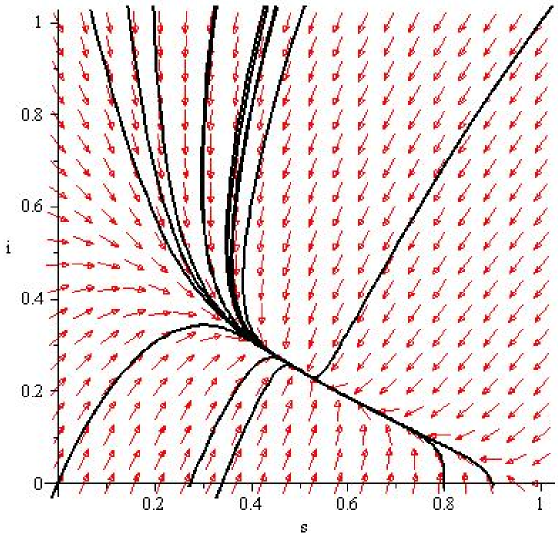
$$Jf(\hat{S},0{,}0) = \begin{bmatrix} 0{,}2-0{,}4-0{,}1 & 0 & -0{,}667 \\ 0 & -0{,}6-0{,}4-0{,}1 & 0{,}6667 \\ 0 & 0{,}6 & -0{,}4-0{,}03-0{,}1-0{,}1 \end{bmatrix}$$

$$Jf(\hat{S},0,0) = \begin{bmatrix} -0,3 & 0 & -0,667 \\ 0 & -1,1 & 0,667 \\ 0 & 0,6 & -0,63 \end{bmatrix}$$

Kemudian hitung det $\left(\lambda I - Jf(\hat{S},0,0)\right)$

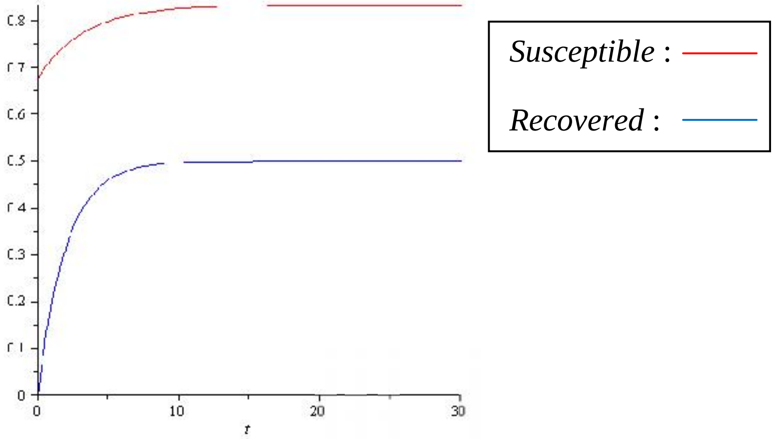
$$\det \begin{bmatrix} \lambda + 0,3 & 0 & 0,667 \\ 0 & \lambda + 1,1 & -0,667 \\ 0 & -0,6 & \lambda + 0,63 \end{bmatrix} = 0$$

Maka diperoleh persamaan karakteristik $\lambda^3 + 2,03\lambda^2 + 0,812\lambda + 0,0879$ dengan nilai eigen $\lambda_1 = -0,3$, $\lambda_2 = -0,19$ dan $\lambda_3 = -1,54$. Berdasarkan teorema (2.1), dapat disimpulkan bahwa titik ekuilibrium bebas penyakit stabil asimtotik. Hal ini dapat digambarkan dalam gambar (4.2) berikut :



Gambar 4.2 Orbit Kestabilan Model SEIR Penyakit Campak dengan Vaksinasi dan Migrasi pada Titik Ekuilibrium Bebas Penyakit

Berdasarkan gambar 4.2 tampak bahwa arah trayektori menuju titik ekuilibrium sehingga dapat disimpulkan bahwa titik ekuilibrium bebas penyakit stabil asimtotik. Sedangkan dinamika populasi S, E, I, R menurut tahunan waktu dapat dilihat pada gambar berikut :



Gambar 4.3 Dinamika Popolasi *S*, *E*, *I* dan *R* pada Titik Ekuilibirum Bebas Penyakit

b. Titik Ekuilibrium Endemik Penyakit

Berdasarkan sistem (4.5) pada simulasi bebas penyakit di atas, dengan mengambil parameter $b = 0{,}5$, $\beta = 0{,}8$, $p = 0{,}5$, $\mu = 0{,}1$, $\delta = 0{,}2$, $\alpha = 0{,}05$, $\gamma = 0{,}03$, $m_1 = 0{,}1$, $m_2 = 0{,}1$, $n = 1$. diperoleh sistem berikut :

$$\frac{dS}{dt} = 0{,}5(1 - 0{,}5) + 0{,}2s - 0{,}8\, si - 0{,}1s - 0{,}1s$$

$$\frac{dE}{dt} = 0{,}8\, si - 0{,}6e - 0{,}1e - 0{,}1e$$

$$\frac{dI}{dt} = 0{,}2e - 0{,}03i - 0{,}1i - 0{,}05i - 0{,}1i$$

$$\frac{dR}{dt} = (0{,}5)(0{,}5) + 0{,}03i - 0{,}1r - 0{,}1r \tag{4.7}$$

Titik ekuilibrium endemik penyakit adalah $S^*, E^*, I^* = (0{,}7,\ 0{,}321,\ 0{,}217)$. Bilangan reproduksi dasar sebesar $R_0 = 3{,}571$. Untuk menentukan kestabilannya, maka subsitusikan nilai parameter ke matriks Jacobian berikut :

$$Jf(S^*, E^*, I^*)$$

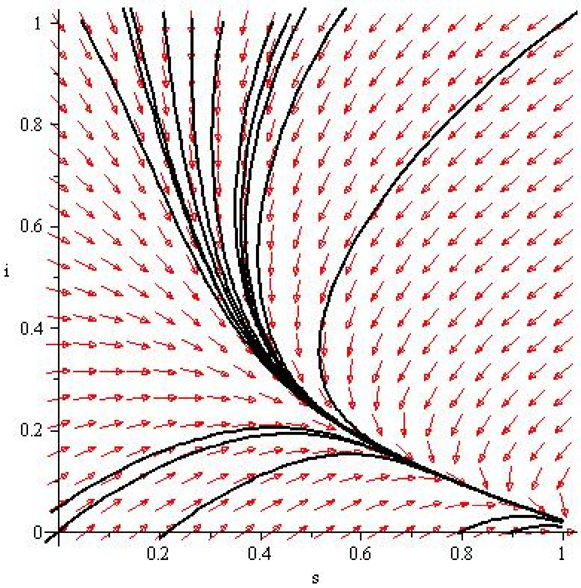
$$= \begin{bmatrix} 0{,}1 - 0{,}256 - 0{,}1 - 0{,}1 & 0 & -0{,}56 \\ 0{,}256 & -0{,}2 - 0{,}1 - 0{,}1 & 0{,}56 \\ 0 & 0{,}2 & -0{,}1 - 0{,}03 - 0{,}05 - 0{,}1 \end{bmatrix}$$

$$Jf(S^*, E^*, I^*) = \begin{bmatrix} -0{,}357 & 0 & -0{,}56 \\ 0{,}256 & -0{,}4 & 0{,}56 \\ 0 & 0{,}2 & -0{,}28 \end{bmatrix}$$

Kemudian hitung det $\left(\lambda I - Jf(\hat{S}, 0{,}0)\right)$

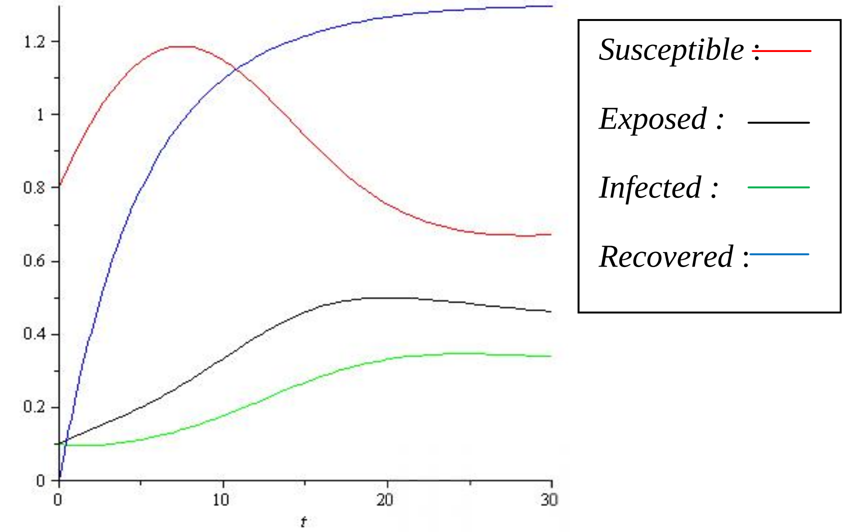
$$\det\begin{bmatrix} \lambda + 0{,}356 & 0 & 0{,}56 \\ -0{,}256 & \lambda + 0{,}4 & -0{,}56 \\ 0 & -0{,}2 & \lambda + 0{,}28 \end{bmatrix} = 0$$

Maka diperoleh persamaan karakteristik $\lambda^3 + 1{,}037\lambda^2 + 0{,}243\lambda + 0.0289 = 0$. Berdasarkan kriteria Routh-Hurwitz, dapat diperoleh bahwa $a_1 > 0, a_2 > 0$ dan $a_1a_2 > a_3$. Jadi dapat disimpulkan bahwa titik ekuilibrium endemik penyakit stabil asimtotik. Hal ini dapat digambarkan dalam gambar (4.4) berikut :



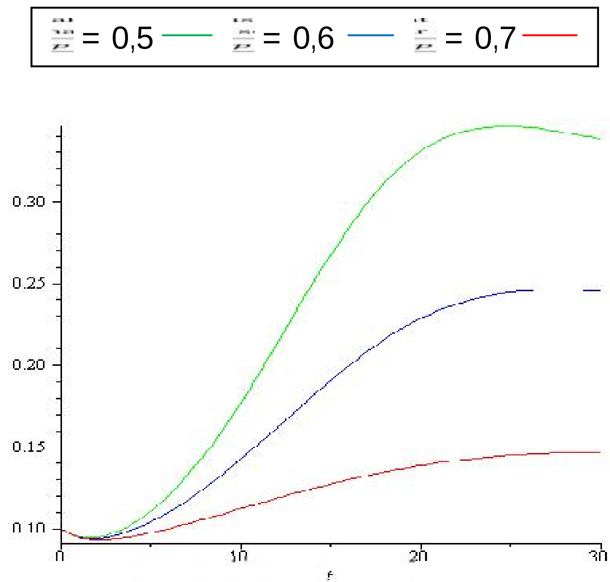
Gambar 4.4 Orbit Kestabilan Model SEIR Penyakit Campak dengan Vaksinasi dan Migrasi pada Titik Ekuilibrium Endemik Penyakit

Berdasarkan gambar 4.4 tampak bahwa arah trayektori menuju titik ekuilibrium sehingga dapat disimpulkan bahwa titik ekuilibrium bebas penyakit stabil asimtotik. Sedangkan dinamika populasi S, E, I, R menurut tahunan waktu dapat dilihat pada gambar berikut :



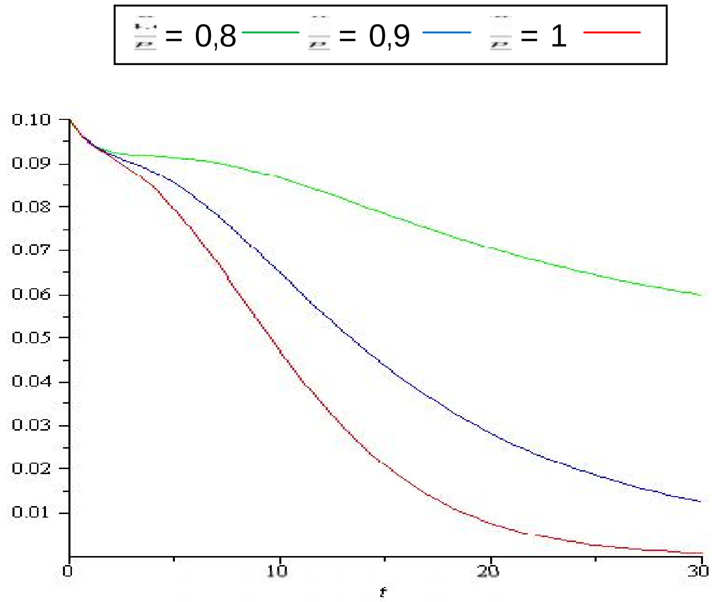
Gambar 4.5 Dinamika Populasi S, E, I dan R Titik Ekuilibrium Endemik Penyakit

Jumlah orang yang harus divaksinasi pada kasus endemik penyakit ini adalah $p_c > 1 - \frac{1}{R_0}$. Karena $R_0 = 3{,}571$ maka diperoleh nilai $p_c = 0{,}72$. Hal ini bearti bahwa untuk mencegah terjadinya endemik penyakit maka proporsi orang yang divaksinasi harus lebih besar dari $0{,}72$. Selanjutkan akan dianalisis jika tingkat vaksinasi lebih kecil daripada tingkat vaksinasi minimum seperti gambar 4.5 berikut :



Gambar 4.5 Proporsi Individu Kelas *Infected* dengan $p = 0,5$, $p = 0,6$, $p = 0,7$

Berdasarkan Gambar 4.5 di atas, dapat dilihat bahwa semakin besar tingkat vaksinasi, maka proporsi kelas individu yang terinfeksi semakin menurun. Tetapi vaksinasi yang diberikan pada penyakit campak akan selalu ada dalam jangka waktu tak terbatas. Dengan demikian vaksinasi yang dilakukan tidak berhasil membuat penyakit campak menghilang dari populasi. Selanjutnya akan dianalisis pengaruh vaksinasi jika tingkat vaksinasi yang diberikan lebih besar daripada tingkat vaksinasi minimum seperti gambar 4.6 berikut :



Gambar 4.7 **Proporsi Individu pada Kelas *Infected* dengan $p = 0,8, p = 0,9, p = 1$**

Berdasarkan gambar 4.7 di atas, dapat disimpulkan bahwa penyakit campak akan hilang dari populasi atau populasi bebas penyakit campak jika proporsi individu yang terinfeksi penyakit campak adalah $p = 1$.

BAB V
PENUTUP

Bab V dalam penelitian ini terdiri dari kesimpulan dari pembahasan yang telah dilakukan pada Bab IV dan saran bagi pembaca yang ingin melanjutkan penelitian ini.

5.1 Kesimpulan

Berdasarkan pembahasan pada bab IV yaitu model SEIR penyakit campak dengan adanya vaksinasi dan migrasi dapat diambil kesimpulan sebagai berikut :

a. Model penyebaran penyakit campak menggunakan model SEIR dengan adanya asumsi vaksinasi dan migrasi adalah sebagai berikut :

$$\frac{dS}{dt} = b(1-p)N + m_1 S - \frac{\beta SI}{N} - \mu S - m_2 S$$

$$\frac{dE}{dt} = \frac{\beta SI}{N} - \delta E - \mu E - m_2 E$$

$$\frac{dI}{dt} = \delta E - \gamma I - \mu I - \alpha I - m_2 I$$

$$\frac{dR}{dt} = bpN + \gamma I - m_2 R - \mu R$$

b. Titik ekuilibrium terdiri atas dua, yaitu titik ekuilibrium bebas penyakit dan titik ekuilibrium endemik penyakit. Titik ekuilibrium bebas penyakit $(S^*, E^*, I^*) = (\frac{b(1-p)N}{(-m_1+\mu+m_2)}, 0,0)$. Sedangkan titik ekuilibrium endemik penyakit adalah $(S^*, E^*, I^*) =$

$$\left(\frac{(\delta+\mu+m_2)(\gamma+\mu+\alpha+m_2)N}{\delta\beta},\right.$$

$$\frac{\left(b(1-p)N - \frac{(-m_1+\mu+m_2)(\delta+\mu+m_2)(\gamma+\mu+\alpha+m_2)N}{\delta\beta}\right)}{(\delta+\mu+m_2)(\gamma+\mu+\alpha+m_2)},$$

$$\left.\left(b(1-p)N - \frac{(-m_1+\mu+m_2)(\delta+\mu+m_2)(\gamma+\mu+\alpha+m_2)N}{\delta\beta}\right)\frac{1}{(\delta+\mu+m_2)}\right)$$

c. Bilangan Reproduksi Dasar (R_0) dapat didefinisikan sebagai berikut :

$$R_0 = \frac{b(1-p)\beta\delta}{(-m_1+\mu+m_2)(\delta+\mu+m_2)(\gamma+\mu+\alpha+m_2)}$$

d. Jika Jika $R_0 < 1$ maka titik ekuilibrium bebas penyakit penyakit $(\hat{S},\hat{E},\hat{I})$ stabil asimtotik. Dan jika $R_0 > 1$ maka titik ekuilibrium endemik penyakit (S^*,E^*,I^*) stabil asimtotik.

e. Jumlah individu yang harus divaksinasi agar tidak terjadi endemik pada penyakit campak adalah $p_c > 1-\frac{1}{R_0}$. Jika tingkat minimum jumlah orang yang divaksinasi terpenuhi, maka jumlah individu yang terkena penyakit campak akan berkurang dan didalam populasi tidak terjadi endemik pada penyakit campak.

5.2 Saran

Tugas akhir ini menjelaskan tentang model penyebaran penyakit menggunakan model SEIR dengan adanya vaksinasi dan migrasi pada penyakit campak. Bagi pembaca yang berminat bisa melanjutkan dengan menggunakan fungsi Lyapunov dan mensimulasikan model dengan mengambil parameter sesuai dengan studi kasus yang ada di suatu daerah atau wilayah tertentu.

DAFTAR PUSTAKA

Anton, H, *Aljabar Linear Elementer*, Terjemahan Pantur Silaban dan I Nyoman Susila, Edisi ke-5, Erlangga, Jakarta, 1998.

Chasnov, R. Jeffrey, *Mathematical Biology*, The Hong Kong University Of Science and Technology, Hong Kong, 2009.

Ekawati, Aminah, Kestabilan Model SEIR, *Media Sains*. Vol. 3, No. 2, Oktober 2011.

Kocak, H. dan Hale, J. K. , *Dynamic and Bifurcation*, Springer-verlag, New York, 1991.

Panfilov, A., *Qualitative Analysis Of Differential Equation*, Utrecht University, Utrecht, 2004.

Perko, L., 1991, *Differential Equations and Dynamical Systems*, Springer-verlag, New York, 1991.

Suhendar, Ace, *Analisis Kestabilan Model SIR, SIR Vaksinasi, SEIR dan MSEIR Sebagai Model-Model Penyebaran Penyakit Campak (Measles)*, Skripsi IPB, 2011

Tessa, Moussa. Mathematical Model for Control of Measles by Vaccination. *Mali Symposium on Applied Sciences (MSAS)*, hal. 31-36, 2006.

Widoyono, *Epidemiologi, Penularan, Pencegahan & Pemberantasannya*, Erlangga, Jakarta. 2005.

Wiggins, S. *Introduction to Applied Nonlinear Dynamical System and Chaos*, Springer Verlag, New York, 1990.